

Studienarbeit

Beiträge zur Theorie und
Anwendung ein- und
mehrdimensionaler Netzwerke

Vorgelegt von
Geboren

Tobias Nähring
am 13. März 1970 in Dresden

Betreuer
Verantwortlicher Hochschullehrer

Prof.Dr.-Ing.habil. A. Reibiger
Prof.Dr.-Ing.habil. A. Reibiger

Tag der Einreichung

28. 6. 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Netzwerktheoretische Grundlagen und Verallgemeinerungen	7
1.1 Zusammenstellung netzwerktheoretischer Grundlagen	7
1.2 Parametrische Darstellung des Kirchhoffschen Teils der Grundsignalmenge	8
1.3 Eine Verallgemeinerung des Kirchhoffschen Spannungsgesetzes	14
1.4 Eine Modifikation des Kirchhoffschen Stromgesetzes	22
2 Grundzüge der Theorie der Stabtragwerke	25
2.1 Bemerkungen zu den mathematischen Grundlagen	25
2.2 Der starre Körper als Tragwerkelement	29
2.3 Der Balken nach Bernoulli als Tragwerkelement	35
2.4 Weitere Tragwerkelemente	49
2.5 Modellierung von Stabtragwerken	50
2.5.1 Physikalische Modellierung von Stabtragwerken	50
2.5.2 Netzwerkähnliche Modellierung von Stabtragwerken	53
Zusammenfassung und Ausblick	67
A Auszüge aus der Graphentheorie	75

Einleitung

In dieser Arbeit wird untersucht, inwieweit sich Elemente der Netzwerktheorie auf die Behandlung von Stabtragwerken übertragen lassen.

Im ersten Teil wird noch einmal auf einige Grundlagen der Netzwerktheorie eingegangen. Die Definitionen orientieren sich dabei an dem Skript zu den Vorlesungen zur Netzwerktheorie [11] von Professor Reibiger. Jedoch werden sie gleich für höherdimensionale Netzwerke formuliert. Damit sind auch Fachwerke, die spezielle Stabtragwerke darstellen, im Rahmen der Netzwerktheorie behandelbar.

Eine zentrale Stellung in der Netzwerktheorie nimmt die verallgemeinerte Maschenstrom- und Schnittspannungsanalyse ein. Mit ihrer Hilfe läßt sich der Kirchhoffsche Teil der Grundsignalmenge eines Netzwerkes einfach parametrisieren.

Es wird gezeigt, daß dieses Verfahren auch auf höherdimensionale Netzwerke übertragbar ist. Dabei kann die Forderung, daß Strom- und Spannungsraum endliche Dimension haben, fallengelassen werden.

Der Rest des ersten Teils beschäftigt sich mit Verallgemeinerungen und Modifikationen von Teilen der Netzwerktheorie, die es ermöglichen sollen, Parallelen zwischen der Netzwerktheorie und der Behandlung von Stabtragwerken zu ziehen.

Da bei den Kirchhoffschen Gesetzen für Netzwerke im wesentlichen nur die additive Gruppenstruktur des Spannungs- und des Stromraumes eine Rolle spielt, liegt es nahe, daß sich Netzwerktheorie auch mit abelschen Gruppen als „Grundräume“ betreiben läßt.

An die Stelle der Zweigspannungen bei Netzwerken treten bei Stabtragwerken die Formen der Tragwerkelemente. Diese können durch orientierungserhaltende Isometrien des \mathbb{R}^3 beschrieben werden, die eine *nicht*abelsche Gruppe bilden. Im Abschnitt 1.3 wird eine Möglichkeit gezeigt, wie Begriffe der Netzwerktheorie auf den Fall übertragen werden können, daß die Zweigmenge eines Graphen mit Elementen einer nicht notwendigerweise abelschen Gruppe belegt sind. Außerdem wird ein der Schnittspannungsanalyse entsprechendes Verfahren auf diesen Fall übertragen.

Weiterhin wird ein modifiziertes Kirchhoffsches Stromgesetz eingeführt, mit welchem später in der Arbeit die Kraftgrößengleichgewichte in Stabtragwerken modelliert werden. Gezeigt wird, daß die Maschenstromanalyse auch im Zusammenhang mit dem modifizierten Kirchhoffschen Stromgesetz anwendbar ist.

Nach einer kurzen Wiederholung von mathematischen und physikalischen Grundlagen am Anfang des zweiten Teils dieser Arbeit, werden ausführlich zwei wichtige Stabtragwerkelemente, der starre Körper und der Balken, behandelt. Am Ende der Erläuterungen zum starren Körper wird kurz darauf eingegangen, wie Andrews in seiner Arbeit [1] starre Körper modelliert.

In einem weiteren Abschnitt werden noch andere Tragwerkelemente vorgestellt. Anhand dieser wird auf die Bewegungsinvarianz, die eine wichtige Eigenschaft der meisten Tragwerkelemente ist, hingewiesen.

Nachdem gezeigt wurde, wie einzelne Tragwerkelemente beschrieben werden können, wird auf die Modellierung ganzer Stabtragwerke eingegangen. Dabei spielen vor allem die Kraftgrößengleichgewichte und die geometrischen Restriktionen, die sich bei der Verbindung von Tragwerkelementen ergeben, eine Rolle. Die Forderung nach der Erfüllung der Kraftgrößengleichgewichte in einem Tragwerk kann als Kirchhoffsches Stromgesetz dieses Tragwerkes interpretiert werden und die geometrischen Restriktionen als Kirchhoffsches Spannungsgesetz.

Es werden nacheinander zwei Varianten zur Modellierung von Stabtragwerken entwickelt. Die erste wird vom Autor als physikalische Modellierung von Stabtragwerken bezeichnet. Sie baut direkt auf den vorher erläuterten physikalischen Grundlagen auf und ist somit leicht zu begründen.

Aus der physikalischen Modellierung von Stabtragwerken wird die zweite Variante, die netzwerkähnliche Modellierung von Stabtragwerken, entwickelt. Bei ihr entsprechen die geometrischen Restriktionen, die sich durch die Verbindung von Tragwerkelementen ergeben, dem im ersten Teil der Arbeit vorgestellten verallgemeinerten Kirchhoffschen Spannungsgesetz. Die Kraftgrößengleichgewichte können allerdings nur durch das modifizierte Kirchhoffsche Stromgesetz beschrieben werden.

Am Ende der Arbeit wird noch klargestellt, in welchem Sinne physikalische und netzwerkähnliche Modellierung von Stabtragwerken gleichwertig sind. Damit wird der netzwerkähnlichen Modellierung eine physikalische Rechtfertigung verliehen.

Kapitel 1

Netzwerktheoretische Grundlagen und Verallgemeinerungen

1.1 Zusammenstellung netzwerktheoretischer Grundlagen

In diesem Abschnitt werden grundlegende netzwerktheoretische Begriffe zusammengestellt. Die zwei wesentlichen Elemente von Netzwerken sind eine $u-i$ -Relation und ein Graph. Bei einem elektrischen Netzwerk modelliert dabei die $u-i$ -Relation die elektrischen Eigenschaften von einzelnen Bauelementen und der Graph die Verbindungsstruktur der Bauelemente in einer Gesamtschaltung. Die Kirchhoffschen Gesetze der Netzwerktheorie modellieren die bei der Verbindung von Bauelementen wirkenden physikalischen Gesetze. Das Hauptinteresse bei der Anwendung der Netzwerktheorie liegt in der Ermittlung der Lösungsmenge eines Netzwerkes. Diese Menge besteht aus denjenigen Elementen der $u-i$ -Relation, die die Kirchhoffschen Gesetze erfüllen. Sie modelliert die elektrischen Eigenschaften der Gesamtschaltung.

Im folgenden werden Grundkenntnisse der Graphentheorie vorausgesetzt.

Die gemeinsame Obermenge für $u-i$ -Relation, Kirchhoffsche Gesetze und Lösungsmenge bildet die Grundsignalmenge. Mit ihr werden die zur Modellierung physikalischer Prozesse betrachteten Zeitfunktionen vereinbart.

Gegeben seien zwei normierte reelle Vektorräume \mathcal{U} und \mathcal{I} und eine endliche Menge \mathcal{Z} . Dann heißt die Menge

$$\mathfrak{S} := C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U}^{\mathcal{Z}}) \times C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{I}^{\mathcal{Z}})$$

Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} , ferner wird \mathcal{U} *Raum der Spannungswerte* und \mathcal{I} *Raum der Stromwerte* genannt, die Elemente von \mathfrak{S} heißen *Signale*.

Gegenüber der Darstellung in [11] ist diese Definition einerseits vereinfacht, da hier nur glatte Funktionen zugelassen werden, die auf der gesamten Zeitachse \mathbb{R} definiert sind. Andererseits stellt sie eine Verallgemeinerung dar, da nicht gefordert wird, daß \mathcal{U} und \mathcal{I} eindimensional sind.

Ein Paar $\mathcal{N} := (\mathcal{G}, \mathcal{V})$ eines (orientierten) Graphen¹ $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ und einer Teilmenge \mathcal{V} der Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} heißt *Netzwerk* und die Menge \mathcal{V} bezeichnet

¹Ein (orientierter) Graph ist ein Tripel $(\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ aus zwei disjunkten endlichen Mengen \mathcal{Z} , \mathcal{K} und einer (nichtleeren) Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Dabei heißt \mathcal{Z} Zweigmengung, \mathcal{K} Knotenmenge und

man als *u-i-Relation* von \mathcal{N} .

Zu bemerken ist, daß in [11] die erste Komponente eines Netzwerkes definitionsgemäß ein Skelett, also ein Paar eines Spannungs- und eines Stromgraphen, ist. Im Sinne von [11] werden hier nur Netzwerke mit gleichorientierten Spannungs- und Stromgraphen behandelt. Damit ist das Skelett mit einem Graphen identifizierbar. Das erklärt die obige etwas vereinfachte Netzwerkdefinition.

Man sagt, ein Signal (u, i) aus der Grundsignalmenge \mathfrak{S} auf der Zweigmengenge eines Graphen \mathcal{G} erfüllt das *Kirchhoffsche Spannungsgesetz* bzgl. \mathcal{G} , wenn die Gleichung²

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} u_b(t) - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} u_b(t) = 0 \quad (1.1)$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und jede Masche $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von \mathcal{G} gilt. Entsprechend sagt man, daß dieses Signal das *Kirchhoffsche Stromgesetz* bzgl. \mathcal{G} erfüllt, wenn die Gleichung

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} i_b(t) - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} i_b(t) = 0 \quad (1.2)$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und jeden Schnitt $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von \mathcal{G} gilt. Die Menge aller Signale aus \mathfrak{S} , die das Kirchhoffsche Spannungsgesetz und das Kirchhoffsche Stromgesetz bzgl. eines Graphen \mathcal{G} erfüllen, heißt *Kirchhoffscher Teil der Grundsignalmenge* bzgl. \mathcal{G} und wird mit \mathcal{H} bezeichnet.

Die Lösungsmenge \mathcal{L} eines Netzwerkes $(\mathcal{G}, \mathcal{V})$ ist die Menge der Signale aus der *u-i-Relation*, die die Kirchhoffschen Gesetze bzgl. \mathcal{G} erfüllen, also

$$\mathcal{L} = \mathcal{V} \cap \mathcal{H}. \quad (1.3)$$

1.2 Parametrische Darstellung des Kirchhoffschen Teils der Grundsignalmenge

Die definierenden Gleichungen des Kirchhoffschen Teils der Grundsignalmenge (1.1,1.2) bilden ein lineares Gleichungssystem. Zur Ermittlung der Lösungsmenge eines Netzwerkes ist jedoch eine parametrische Darstellung von \mathcal{H} vorteilhafter.

Den Schlüssel zu einer solchen Darstellung bildet der Orthogonalitätssatz aus der Graphentheorie. Da diesem Satz große Bedeutung zukommt, wird sein Beweis in diesem Abschnitt nocheinmal dargestellt.

Außerdem wird gezeigt, daß eine solche parametrische Darstellung des Kirchhoffschen Teils der Grundsignalmenge auch dann möglich ist, wenn die Räume der Spannungs- und Stromwerte beliebige Dimensionen haben.

Falls nichts anderes gesagt wird, werden ab jetzt für Graphen standardisierte Zweigmengen vorausgesetzt, d. h. für die jeweilige Zweigmengenge gilt $\mathcal{Z} = \{1, \dots, z\}$ mit einem $z \in \mathbb{N}$.

\mathcal{A} Inzidenzabbildung. In diesem Beleg werden nur orientierte Graphen verwendet. Diese werden einfach als Graphen bezeichnet.

²Für eine Funktion x , die eine Menge \mathcal{R} in ein Produkt normierter Räume $\prod_{b \in \mathcal{Z}} \mathcal{X}_b$ mit Indexmenge \mathcal{Z} abbildet, sind die Komponentenfunktionen $x_b : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{X}_b$ ($b \in \mathcal{Z}$) wie üblich erklärt durch $\forall t \in \mathcal{R} : x_b(t) := x(t)(b)$.

Für ein Paar $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ disjunkter Teilmengen der Zweigmengens \mathcal{Z} eines Graphen sei der Vektor $[(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)] \in \mathbb{R}^{\mathcal{Z}}$ erklärt durch

$$[(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)]_b := \begin{cases} +1 & \text{für } b \in \mathcal{Z}^+, \\ -1 & \text{für } b \in \mathcal{Z}^- \text{ und} \\ 0 & \text{für } b \in \mathcal{Z} \setminus (\mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-). \end{cases}$$

Der Einfachheit halber werden die inneren Klammern weggelassen, wenn das nicht zu Verwechslungen führen kann $[\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-] := [(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)]$.

Der Raum

$$\mathcal{W}_M := \text{span} \{ [\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-] \in \mathbb{R}^{\mathcal{Z}} \mid (\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-) \text{ ist Masche von } \mathcal{G} \}$$

heißt *Maschenraum* des Graphen \mathcal{G} . Entsprechend heißt der Raum

$$\mathcal{W}_S := \text{span} \{ [\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-] \in \mathbb{R}^{\mathcal{Z}} \mid (\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-) \text{ ist Schnitt von } \mathcal{G} \}$$

Schnitttraum von \mathcal{G} .

Die Rolle von Maschenraum und Schnitttraum in der Netzwerktheorie verdeutlichen die folgenden einfachen Aussagen für ein Netzwerk mit $\mathcal{U} = \mathcal{I} = \mathbb{R}$.

Ein Signal $(u, i) \in \mathcal{S}$ erfüllt genau dann das Kirchhoffsche Spannungsgesetz, wenn³

$$\forall v \in \mathcal{W}_M : \text{T}vu(t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Entsprechend erfüllt es genau dann das Kirchhoffsche Stromgesetz, wenn

$$\forall v \in \mathcal{W}_S : \text{T}vi(t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Immer wenn in folgenden ein Graph \mathcal{G} mit Zweigmengens \mathcal{Z} und dazu ein vollständiger Wald von \mathcal{G} mit Zweigmengens \mathcal{Z}_W gegeben sind, so bezeichnet $\mathcal{C}_b = (\mathcal{C}_b^+, \mathcal{C}_b^-)$ den durch den Waldzweig $b \in \mathcal{Z}_W$ eindeutig bestimmten Fundamentalschnitt mit $b \in \mathcal{C}_b^+$ und $(\mathcal{C}_b^+ \cup \mathcal{C}_b^-) \setminus \{b\} \subset \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_W$.

Ist analog \mathcal{Z}_V ein Verbindungszweigsystem von \mathcal{G} , so bezeichnet $\mathcal{M}_b = (\mathcal{M}_b^+, \mathcal{M}_b^-)$ die durch $b \in \mathcal{Z}_V$ eindeutig festgelegte Fundamentalmasche mit $b \in \mathcal{M}_b^+$ und $(\mathcal{M}_b^+ \cup \mathcal{M}_b^-) \setminus \{b\} \subset \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_V$.

Der nächste Satz beschreibt die für diese Arbeit wichtigsten Eigenschaften von Maschenraum und Schnitttraum eines Graphen. Er ist die Grundlage für die Parameterdarstellung des Kirchhoffschen Teils der Signalmengens eines Netzwerkes.

Satz 1 (Orthogonalitätssatz) Für einen Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ gelten die folgenden Aussagen.

1. $\mathcal{W}_S = \mathcal{W}_M^\perp$, das heißt, der Schnitttraum ist das orthogonale Komplement des Maschenraumes.
2. Sei \mathcal{Z}_W die Zweigmengens eines vollständigen Waldes von \mathcal{G} und \mathcal{Z}_V ein Verbindungszweigsystem von \mathcal{G} . Dann bildet die Familie von Vektoren $\mathcal{B}' := ([\mathcal{M}_b])_{b \in \mathcal{Z}_V}$ eine Basis des Maschenraumes und die Familie $\mathcal{B}'' := ([\mathcal{C}_b])_{b \in \mathcal{Z}_W}$ eine Basis des Schnitttraumes.

³Die Transponierte $\text{T}v$ eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ist die durch $\forall x \in \mathbb{R}^n : \text{T}v(x) := \sum_{i=1}^n v_i x_i$ definierte Linearform aus $(\mathbb{R}^n)^*$.

Beweis: Der Beweis wird in zwei Schritten durchgeführt. Im ersten Schritt wird die Orthogonalität der Räume \mathcal{W}_M und \mathcal{W}_S gezeigt. Im zweiten Schritt werden die Dimensionen dieser Räume ermittelt. Es ergibt sich, daß die direkte Summe von \mathcal{W}_M und \mathcal{W}_S schon der ganze \mathbb{R}^z ist. Dabei fallen die Basiseigenschaften der im Satz genannten Systeme als Nebenprodukt mit ab.

(i) Orthogonalität: Zuerst wird gezeigt, daß zu einer beliebigen Masche $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^+, \mathcal{M}^-)$ und einem beliebigen Schnitt $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-)$ die zugehörigen Vektoren $[\mathcal{M}]$ und $[\mathcal{C}]$ orthogonal zueinander sind.

O.B.d.A kann man $\mathcal{M}^- = \emptyset$ voraussetzen. Denn angenommen $\mathcal{M}^- \neq \emptyset$ und $b \in \mathcal{M}^-$, dann geht man zu einem Graphen $\tilde{\mathcal{G}}$ über, der sich nur dadurch von \mathcal{G} unterscheidet, daß für b Start- und Zielknoten vertauscht sind. Von $\tilde{\mathcal{G}}$ bildet dann $(\tilde{\mathcal{M}}^+, \tilde{\mathcal{M}}^-)$ mit $\tilde{\mathcal{M}}^+ := \mathcal{M}^+ \cup \{b\}$ und $\tilde{\mathcal{M}}^- := \mathcal{M}^- \setminus \{b\}$ eine Masche. Außerdem gehört zu einer Knotenpartition, die in \mathcal{G} den Schnitt \mathcal{C} erzeugt, in $\tilde{\mathcal{G}}$ ein Schnitt $\tilde{\mathcal{C}}$ der sich nur dadurch von \mathcal{C} unterscheidet, daß b die Komponente wechselt, falls b in diesem Schnitt liegt. Damit sind $[\mathcal{C}]_b = -[\tilde{\mathcal{C}}]_b$ und $[\mathcal{M}]_b = -[\tilde{\mathcal{M}}]_b$, und es gilt $T[\mathcal{C}][\mathcal{M}] = T[\tilde{\mathcal{C}}][\tilde{\mathcal{M}}]$.

So kann der Graph schrittweise modifiziert werden, bis $\tilde{\mathcal{M}}^-$ leer ist und man hat $T[\mathcal{M}^+, \mathcal{M}^-][\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-] = T[\tilde{\mathcal{M}}^+, \emptyset][\tilde{\mathcal{C}}^+, \tilde{\mathcal{C}}^-]$.

Ein zu einer Masche $(\mathcal{M}^+, \emptyset)$ gehöriger Maschengraph $\mathcal{G}_{\mathcal{M}^+}$ hat die leicht zu überprüfende Eigenschaft, daß mit jedem seiner Knoten genau ein Zweig aus \mathcal{M}^+ positiv inzidiert und genau ein Zweig aus \mathcal{M}^+ negativ inzidiert. Damit liegen in jeder Teilmenge der Knotenmenge von \mathcal{G} genausoviele Startknoten von Zweigen aus \mathcal{M}^+ wie Zielknoten von Zweigen aus \mathcal{M}^+ .

Das gilt auch für die Menge \mathcal{K}^+ einer den Schnitt $(\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-)$ erzeugenden Knotenpartition $(\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-)$. Somit ist die Anzahl der Zweige aus \mathcal{M}^+ mit Startknoten in \mathcal{K}^+ und Zielknoten nicht in \mathcal{K}^+ (also der Zweige aus $\mathcal{M}^+ \cap \mathcal{C}^+$) gleich der Anzahl der Zweige aus \mathcal{M}^+ mit Startknoten nicht in \mathcal{K}^+ und Zielknoten in \mathcal{K}^+ (also der Zweige aus $\mathcal{M}^+ \cap \mathcal{C}^-$). Das beweist

$$T[\mathcal{M}][\mathcal{C}] = \sum_{b \in \mathcal{M}^+ \cap \mathcal{C}^+} +1 \quad + \quad \sum_{b \in \mathcal{M}^+ \cap \mathcal{C}^-} -1 = 0.$$

Damit ist $\mathcal{W}_M \perp \mathcal{W}_S$ klar.

(ii) Dimensionen: Jede Fundamentalmasche $(\mathcal{M}_b^+, \mathcal{M}_b^-)$ enthält in \mathcal{M}_b^+ den Verbindungszweig b und besteht sonst nur aus Waldzweigen. Somit ist nur beim b -ten Vektor der Familie \mathcal{B}' die b -te Komponente ungleich Null. Also sind die Vektoren aus \mathcal{B}' linear unabhängig.

Aus der Graphentheorie ist bekannt, daß jeder vollständige Wald eines Graphen \mathcal{G} mit z Zweigen, k Knoten und c Komponenten $k - c$ Waldzweige und das zugehörige Verbindungszweigsystem $z - k + c$ Verbindungszweige hat.

Das System \mathcal{B}' stellt also eine Familie von $z - k + c$ linear unabhängigen Vektoren des \mathbb{R}^z dar. Diese zu Fundamentalmaschen gehörigen Vektoren sind alle im Maschenraum enthalten. Damit gilt

$$\dim \mathcal{W}_M \geq z - k + c.$$

Analog nutzt man, daß jeder Fundamentalschnitt $(\mathcal{C}_b^+, \mathcal{C}_b^-)$ in \mathcal{C}_b^+ den Waldzweig b und sonst nur Verbindungszweige enthält. Es ergibt sich, daß \mathcal{B}'' System linear unabhängiger Vektoren ist und daß die Ungleichung

$$\dim \mathcal{W}_S \geq k - c \quad (1.4)$$

gilt.

Die Dimensionen von \mathcal{W}_M läßt sich aufgrund der Orthogonalität der Räume \mathcal{W}_M und \mathcal{W}_S untereinander mittels

$$z = \dim \mathbb{R}^z \geq \dim(\mathcal{W}_M \oplus \mathcal{W}_S) = \dim \mathcal{W}_M + \dim \mathcal{W}_S \geq \dim \mathcal{W}_M + k - c$$

nach oben durch die Ungleichung

$$\dim \mathcal{W}_M \leq z - k + c \quad (1.5)$$

abschätzen. Aus den beiden Ungleichungen (1.4,1.5) folgt die Gleichung

$$\dim \mathcal{W}_M = z - k + c.$$

Analog ergibt sich

$$\dim \mathcal{W}_S = k - c.$$

Damit sind die Systeme \mathcal{B}' und \mathcal{B}'' linear unabhängige Erzeugendensysteme, also Basen. Die Summe $\mathcal{W}_M \oplus \mathcal{W}_S$ spannt den gesamten Raum auf, also gilt

$$\mathcal{W}_S = \mathcal{W}_M^\perp.$$

□

Eine einfache netzwerktheoretische Folgerung aus der Beziehung $\mathcal{W}_S = \mathcal{W}_M^\perp$ ist, daß sich für $\mathcal{U} = \mathcal{I} = \mathbb{R}$ der Kirchhoffsche Teil der Signalmenge eines Netzwerkes schreiben läßt als

$$\mathcal{H} = \{(u, i) \in \mathcal{S} \mid \forall t \in \mathbb{R} : u(t) \in \mathcal{W}_S \text{ und } i(t) \in \mathcal{W}_M\}.$$

Im Orthogonalitätssatz sind Basen von \mathcal{W}_M und \mathcal{W}_S angegeben worden. Damit läßt sich bei jedem Spannungssignal u , das dem Kirchhoffschen Spannungsgesetz genügt, zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ der Momentanwert $U := u(t)$ eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren $([\mathcal{M}_b])_{b \in \mathcal{Z}_V}$ von \mathcal{W}_S mit entsprechenden Koeffizienten $U_b^\mathcal{S} \in \mathcal{U}$ ($b \in \mathcal{Z}_V$) darstellen. Entsprechendes gilt für die Momentanwerte der Ströme, die das Kirchhoffsche Stromgesetz erfüllen

$$U = \sum_{b \in \mathcal{Z}_V} U_b^\mathcal{S} [\mathcal{C}_b] \quad \text{bzw.} \quad I = \sum_{b \in \mathcal{Z}_W} I_b^\mathcal{S} [\mathcal{M}_b].$$

Diese Darstellung ist auch für Netzwerke mit Spannungs- und Stromräumen beliebiger Dimensionen möglich. Die Grundlage dazu legt die folgende Verallgemeinerung des Orthogonalitätssatzes.

Folgerung 1 (Verallgemeinerung des Orthogonalitätssatzes) Gegeben sei ein reeller Vektorraum \mathcal{X} beliebiger Dimension und ein Graph \mathcal{G} mit der Zweigmengemenge \mathcal{Z} . Ferner seien \mathcal{Z}_W die Zweigmengemenge eines vollständigen Waldes von \mathcal{G} und \mathcal{Z}_V ein Verbindungszweigsystem von \mathcal{G} .

1. Dann sind genau diejenigen Vektoren $x \in \mathcal{X}^{\mathcal{Z}}$ mit Koeffizienten $y_b \in \mathcal{X}$ ($b \in \mathcal{Z}_W$) darstellbar als

$$x_c = \sum_{b \in \mathcal{Z}_W} [\mathcal{C}_b]_c y_b \quad (c \in \mathcal{Z}), \quad (1.6)$$

die für alle Maschen \mathcal{M} von \mathcal{G} die Maschengleichung

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}} [\mathcal{M}]_b x_b = 0$$

erfüllen. Dabei sind in (1.6) die Koeffizienten $y_b \in \mathcal{X}$ ($b \in \mathcal{Z}_W$) durch x eindeutig festgelegt.

2. Analog sind genau diejenigen Vektoren $x \in \mathcal{X}^{\mathcal{Z}}$ mit Koeffizienten $y_b \in \mathcal{X}$ ($b \in \mathcal{Z}_V$) darstellbar als

$$x_c = \sum_{b \in \mathcal{Z}_V} [\mathcal{M}_b]_c y_b \quad (c \in \mathcal{Z}), \quad (1.7)$$

die für alle Schnitte \mathcal{C} von \mathcal{G} die Schnittgleichung

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}} [\mathcal{C}]_b x_b = 0$$

erfüllen. Dabei sind in (1.7) die Koeffizienten $y_b \in \mathcal{X}$ ($b \in \mathcal{Z}_V$) durch x eindeutig festgelegt.

Beweis: Hier wird nur der erste Teil bewiesen, der die Maschengleichungen betrifft, der Beweis für den zweiten, die Schnittgleichungen betreffenden Teil ist analog. Durch Einsetzen von (1.6) mit beliebigen Koeffizienten y_b ($b \in \mathcal{Z}_W$) in die Maschengleichung für eine beliebige Masche \mathcal{M} von \mathcal{G} folgt mit dem Orthogonalitätssatz

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}} [\mathcal{M}]_b \sum_{c \in \mathcal{Z}} [\mathcal{C}_c]_b y_c = \sum_{c \in \mathcal{Z}_V} \underbrace{\mathbb{T}[\mathcal{M}][\mathcal{C}_c]}_{=0} y_c = 0.$$

Es bleiben die andere Richtung und die Eindeutigkeit der Darstellung zu zeigen.

Sei $x \in \mathcal{X}^{\mathcal{Z}}$ ein beliebiger Vektor, der für alle Maschen von \mathcal{G} die Maschengleichungen erfüllt. Zu der Indexmenge J einer Basis $(v_j)_{j \in J}$ von \mathcal{X} gibt es eine endliche Teilmenge J' , so daß alle Vektoren aus x_b ($b \in \mathcal{Z}_W$) als Linearkombinationen

$$x_b = \sum_{j \in J'} x_{b,j} v_j$$

mit eindeutig bestimmten reellen Koeffizienten $x_{b,j}$ ($b \in \mathcal{Z}$, $j \in J'$) darstellbar sind.

Für jede Masche \mathcal{M} von \mathcal{G} genügt x der Maschengleichung

$$0 = \sum_{b \in \mathcal{Z}} [\mathcal{M}]_b x_b = \sum_{b \in \mathcal{Z}} [\mathcal{M}]_b \sum_{j \in J'} x_{b,j} v_j = \sum_{j \in J'} v_j \sum_{b \in \mathcal{Z}} [\mathcal{M}]_b x_{b,j}.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren v_j ($j \in J'$), muß jeder der, als Koeffizienten auftretenden Terme $\sum_{b \in \mathcal{Z}} [\mathcal{M}]_b x_{b,j}$ ($j \in J'$) gleich Null sein. Nach dem Orthogonalitätssatz heißt das jedoch, daß $(x_{b,j})_{b \in \mathcal{Z}} \in \mathcal{V}_M^\perp (= \mathcal{V}_S)$ als $x_{b,j} = \sum_{c \in \mathcal{Z}_V} [\mathcal{C}_c]_b y_{c,j}$ mit eindeutig durch $(x_{b,j})_{b \in \mathcal{Z}}$ festgelegten reellen Koeffizienten $y_{c,j}$ ($c \in \mathcal{Z}_V$) darstellbar ist. Nun kann man aus

$$x_b = \sum_{j \in J'} x_{b,j} v_j = \sum_{j \in J'} \sum_{c \in \mathcal{Z}_V} [\mathcal{C}_c]_b y_{c,j} v_j = \sum_{c \in \mathcal{Z}_V} [\mathcal{C}_c]_b \sum_{j \in J'} y_{c,j} v_j$$

die für die Darstellung (1.6) benötigten Vektoren ablesen

$$y_c = \sum_{j \in J'} y_{c,j} v_j \text{ mit } c \in \mathcal{Z}_W.$$

□

Sei jetzt ein Netzwerk mit den Bezeichnungen aus der Netzwerkdefinition im Abschnitt 1.1 gegeben. Jedem Spannungssignal $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U}^{\mathcal{Z}})$ ist die Familie seiner Komponentenfunktionen $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ zugeordnet. Die Menge aller dieser Familien ergibt sich zu⁴ $(C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U}))^{\mathcal{Z}}$.

In die definierenden Gleichungen des Kirchhoffschen Spannungsgesetzes gehen nur die Komponentenfunktionen der Spannungssignale ein. Entsprechendes gilt für die Stromsignale. Damit läßt sich die vorstehende Verallgemeinerung des Orthogonalitätssatzes mit $\mathcal{X} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ bzw. $\mathcal{X} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{I})$ zur Bestimmung des Kirchhoffschen Teils der Grundsignalmenge des Netzwerkes nutzen.

Folgerung 2 (Parametrische Darstellung von \mathcal{H}) *Gegeben sei ein Graph \mathcal{G} mit der Zweigmengemenge \mathcal{Z} , ein vollständiger Wald von \mathcal{G} mit der Zweigmengemenge \mathcal{Z}_W und ein Verbindungszweigsystem \mathcal{Z}_V . Außerdem sei \mathcal{S} eine Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} mit dem Raum der Spannungswerte \mathcal{U} und dem der Stromwerte \mathcal{I} . Dann erfüllen genau diejenigen Signale $(u, i) \in \mathcal{S}$ die Kirchhoffschen Gesetze, die sich mit Funktionen $u^\circ \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U}^{\mathcal{Z}_W})$ und $i^\circ \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{I}^{\mathcal{Z}_V})$ durch*

$$u_b = \sum_{c \in \mathcal{Z}_W} [\mathcal{C}_c]_b u_c^\circ,$$

$$i_b = \sum_{c \in \mathcal{Z}_V} [\mathcal{M}_c]_b i_c^\circ \quad (\forall b \in \mathcal{Z})$$

darstellen lassen. Falls das Signal sich so darstellen läßt, sind durch dieses die Funktionen u° und i° eindeutig festgelegt.

□

Die in vorstehender Folgerung eingeführten Funktionen u° bzw. i° nennt man *Schnittspannungen* bzw. *Maschenströme*.

⁴Eine Funktion von \mathbb{R} in ein endliches Produkt normierter Räume ist genau dann k -mal differenzierbar, wenn es ihre Komponentenfunktionen sind.

1.3 Eine Verallgemeinerung des Kirchhoffschen Spannungsgesetzes

In die Formulierung des Kirchhoffschen Spannungsgesetzes geht im Rahmen der Netzwerktheorie vom linearen Raum der Spannungswerte nur die abelsche Gruppenstruktur ein. Bei der netzwerkähnlichen Modellierung von Stabtragwerken wird an die Stelle des Raumes der Spannungswerte die Gruppe $\mathbf{Lag}(3)$ der orientierungserhaltenden Isometrien des dreidimensionalen euklidischen Raumes treten. Vorbereitend wird in diesem Abschnitt gezeigt, daß sich das Kirchhoffsche Spannungsgesetz und wichtige mit ihm in Verbindung stehende Aussagen auf den Fall verallgemeinern lassen, daß die Zweige eines Graphen mit Elementen einer beliebigen Gruppe belegt sind. Dabei kann die Gruppe auch nichtabelsch sein, wie das bei $\mathbf{Lag}(3)$ der Fall ist.

Die wohl wichtigsten übertragbaren Aussagen der Netzwerktheorie sind die parametrischen Darstellungen der Menge der Kirchhoffschen Spannungsbelegungen auf der Zweigmengung eines Graphen — also die Kernaussagen zur Knotenspannungsanalyse und zur Schnittspannungsanalyse.

In diesem Abschnitt sei (\mathcal{U}, \circ) eine Gruppe mit der Grundmenge \mathcal{U} und der inneren Verknüpfung \circ . Die Elemente von \mathcal{U} werden als Spannungen bezeichnet, und das neutrale Element der Gruppe erhält das Symbol \mathbf{Id} .

Im Rahmen der Behandlung von Stabtragwerken wird die Permutationsgruppe $\mathbf{Lag}(3)$, die auf dem dreidimensionalen euklidischen Raum operiert, eine besondere Rolle spielen. Die innere Verknüpfung von Permutationsgruppen ist die Komposition von Abbildungen und das neutrale Element ist die identische Abbildung (der Menge auf welcher die Permutationsgruppe operiert). Das begründet die für diesen Abschnitt gewählte Symbolik. Wie für die mehrfache Anwendung von Abbildungen üblich, werden Verknüpfungen von Familien $(u_j)_{j=1,\dots,l}$ aus Elementen $u_j \in \mathcal{U}$ rekursiv definiert durch

$$\Pi_{j=1}^l u_j := \begin{cases} \mathbf{Id} & \text{falls } l = 0, \\ u_l \circ \Pi_{j=1}^{l-1} u_j & \text{für } l = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Zum Beispiel gilt $\Pi_{j=1}^3 u_j = u_3 \circ u_2 \circ u_1$.

In Verallgemeinerung von Spannungsbelegungen und Knotenpotentialen von Netzwerken wird definiert:

Definition 1 (Zweigbelegung, Knotenbelegung, Spannung eines Laufes)

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph. Eine Familie $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}$ mit der Zweigmengung \mathcal{Z} von \mathcal{G} als Indexmenge heißt *Spannungsbelegung der Zweigmengung* von \mathcal{G} oder kurz *Zweigbelegung* von \mathcal{G} . Entsprechend heißt eine Familie $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathcal{U}$ mit der Knotenmenge \mathcal{K} von \mathcal{G} als Indexmenge *Spannungsbelegung der Knotenmenge* von \mathcal{G} oder kurz *Knotenbelegung* von \mathcal{G} .

Weiterhin ordnet man bei gegebener Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ jedem Lauf (β, σ) von \mathcal{G} eine Spannung

$$u_{(\beta, \sigma)} := \Pi_{j=1}^{l(\beta)} u_{\beta^{(j)}}^{\sigma(j)}$$

zu, diese wird als *Spannung von (β, σ)* bzgl. $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ bezeichnet.

Ist (\mathcal{U}, \circ) die additive Gruppe des Spannungsraumes eines Netzwerkes, so wird üblicherweise $+$ statt \circ und 0 statt \mathbf{Id} geschrieben.

Für Netzwerke lautet das Kirchhoffsche Spannungsgesetz:

Eine Spannungsbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}$ der Zweigmense eines Graphen \mathcal{G} erfüllt das Kirchhoffsche Spannungsgesetz auf \mathcal{G} genau dann, wenn für jede orientierte Masche $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von \mathcal{G} die Gleichung

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} u_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} u_b = 0$$

erfüllt ist.

Dieses Gesetz wird auf den Fall, daß \mathcal{U} eine beliebige (eventuell nichtabelsche) Gruppe ist, verallgemeinert. Das sich an die Definition anschließende Lemma zeigt, daß diese Verallgemeinerung mit der natürlichen zyklischen Ordnung orientierter Maschen verträglich ist.

Definition 2 (Verallgemeinerung des Kirchhoffschen Spannungsgesetzes)

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph und $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}$ eine Zweigbelegung von \mathcal{G} .

Es heißt, die Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ genügt bzgl. \mathcal{G} dem *Kirchhoffsche Spannungsgesetz*, falls es zu jeder Masche von \mathcal{G} einen Umlauf (β, σ) gibt, dessen Spannung bzgl. $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ gleich \mathbf{Id} ist. (Für den also $u_{(\beta, \sigma)} = \prod_{j=1}^{l(\beta)} u_{\beta^{(j)}}^{\sigma(j)} = \mathbf{Id}$ gilt.)

Die Menge aller Zweigbelegungen von \mathcal{G} , die dem Kirchhoffschen Spannungsgesetz genügen, wird mit $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ bezeichnet.

Lemma 1 (Zweigbelegung, zyklische Ordnung) Sei $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ eine Zweigbelegung eines Graphen \mathcal{G} und \mathcal{M} eine orientierte Masche von \mathcal{G} . Ist bzgl. $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ die Spannung eines Durchlaufes von \mathcal{M} gleich \mathbf{Id} , so ist die Spannung jedes Durchlaufes von \mathcal{M} gleich \mathbf{Id} .

Beweis: Seien (β, σ) und (β', σ') zwei Durchläufe von \mathcal{M} und gelte $u_{(\beta, \sigma)} = \mathbf{Id}$.

Im Anhang A wird gezeigt, daß sich (β, σ) und (β', σ') nur durch eine Verschiebung unterscheiden können. Sei l die Länge der zwei Durchläufe und $k \in \{0, \dots, l-1\}$ die Verschiebung von (β', σ') zu (β, σ) .

Für den Fall $k = 0$ ist die Aussage des Lemmas wegen $(\beta', \sigma') = (\beta, \sigma)$ trivial. Sei also $k > 0$.

Der Durchlauf (β, σ) wird zerlegt in die beiden Läufe $(\bar{\beta}, \bar{\sigma}) := (\beta, \sigma)_{\{1, \dots, k\}}$ und $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}) := (\beta, \sigma)_{\{k+1, \dots, l\}}$. Mittels dieser Läufe lassen sich die beiden zueinander verschobenen Durchläufe darstellen:

$$\begin{aligned} (\beta, \sigma) &= (\bar{\beta}, \bar{\sigma}) \oplus (\hat{\beta}, \hat{\sigma}), \\ (\beta', \sigma') &= (\hat{\beta}, \hat{\sigma}) \oplus (\bar{\beta}, \bar{\sigma}). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $u_{(\hat{\beta}, \hat{\sigma})} \circ u_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma})} = u_{(\beta, \sigma)} = \mathbf{Id}$. Also sind $u_{(\hat{\beta}, \hat{\sigma})}$ und $u_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma})}$ zueinander invers. Da in Gruppen nicht zwischen Rechtsinversen und Linksinversen unterschieden werden braucht, gilt damit $u_{(\beta', \sigma')} = u_{(\bar{\beta}, \bar{\sigma})} \circ u_{(\hat{\beta}, \hat{\sigma})} = \mathbf{Id}$. \square

Grundlegend für eine Verallgemeinerung der bei der Knotenspannungsanalyse genutzten Knotenpotentiale ist der folgende Begriff.

Definition 3 (Passende Knotenbelegung) Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph und $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ eine Zweigbelegung von \mathcal{G} .

Diejenigen Knotenbelegungen $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathcal{U}$, für die sich die Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}$ durch die Gleichungen

$$u_b = \phi_{\mathcal{A}_-(b)} \circ \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1} \quad \forall b \in \mathcal{Z} \quad (1.8)$$

darstellen läßt, werden als zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ *passende Knotenbelegungen* von \mathcal{G} bezeichnet.

Die sich aus dem nächsten Lemma ergebende Folgerung zeigt, daß die eben definierten passenden Knotenbelegungen an die Stelle der Knotenpotentiale von Netzwerken treten.

Lemma 2 (passende Knotenbelegung, Läufe) Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph, $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathcal{U}$ eine Knotenbelegung von \mathcal{G} und $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}$ eine Zweigbelegung von \mathcal{G} . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ paßt zur Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$.

(ii) Für jeden Lauf (β, σ) von \mathcal{G} ergibt sich die Spannung $u_{(\beta, \sigma)}$ aus der Gleichung

$$u_{(\beta, \sigma)} = \phi_{n'} \circ \phi_n^{-1},$$

wobei n der Startknoten von (β, σ) ist und n' der Zielknoten von (β, σ) ist.

Beweis:

(i) \Rightarrow (ii): Für einen Lauf (β, σ) der Länge Eins ist das klar, denn mit $b := \beta(1)$, $s := \sigma(1)$ gilt $u_{(\beta, \sigma)} = u_b^s = \left(\phi_{\mathcal{A}_-(b)} \circ \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1} \right)^s = \phi_{\mathcal{A}_-(b)} \circ \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}$.

Für längere Läufe geht man induktiv vor: Habe (β, σ) die Länge $l > 1$. Man zerlege (β, σ) in $(\beta', \sigma') := (\beta, \sigma)_{1, \dots, l-1}$ und $(b, s) := (\beta(l), \sigma(l))$. Dann gilt $(\beta, \sigma) = (\beta', \sigma') \oplus (b, s)$ und der Zielknoten n'' von (β', σ') ist gleich dem Startknoten von (b, s) . Unter der Annahme daß (i) \Rightarrow (ii) für Läufe der Länge $l - 1$ schon gezeigt ist, erhält man dann:

$$u_{(\beta, \sigma)} = u_{(b, s)} \circ u_{(\beta', \sigma')} = (\phi_{n'} \circ \phi_{n''}^{-1}) \circ (\phi_{n''} \circ \phi_n^{-1}) = \phi_{n'} \circ \phi_n^{-1}.$$

(ii) \Rightarrow (i): Für jeden Zweig $b \in \mathcal{Z}$ ist $(b, +)$ ein spezieller Lauf von \mathcal{G} . Also gilt nach (ii) die Gleichungskette $u_b = u_{(b, +)} = \phi_{\mathcal{A}_-(b)} \circ \phi_{\mathcal{A}_+(b)}$. Damit paßt die Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ zur Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$. \square

Beachtet man, daß für Durchläufe von orientierten Maschen eines Graphen Start- und Zielknoten gleich sind, so erhält man aus dem vorstehendem Lemma direkt die nächste wichtige Folgerung.

Folgerung 3 (passende Knotenbelegung) Eine Zweigbelegung eines Graphen, zu der eine passende Knotenbelegung existiert, erfüllt das Kirchhoffsche Spannungsgesetz bzgl. dieses Graphen. \square

Bei der Knotenspannungsanalyse im Rahmen der Netzwerktheorie sind die Knotenpotentiale durch eine Kirchhoffsche Spannungsbelegung der Zweige nicht eindeutig festgelegt, sondern pro Komponente des Netzwerkgraphen ist das Potential eines

Knotens frei wählbar. Genauso ist das bei der verallgemeinerten Knotenspannungsanalyse. Dazu zwei Begriffe:

Definition 4 (Bezugsknotenmenge, Bezugsbelegung) Sei \mathcal{G} ein Graph mit Knotenmenge \mathcal{K} . Die Repräsentantensysteme der Verbundenheitsrelation vb von \mathcal{G} heißen *Bezugsknotenmengen* von \mathcal{G} . Das heißt, eine Bezugsknotenmenge enthält aus jeder Komponente von \mathcal{G} genau einen Knoten. Familien $(\psi_n)_{n \in \mathcal{K}'} \subset \mathcal{U}$ mit einer Bezugsknotenmenge \mathcal{K}' eines Graphen \mathcal{G} als Indexmenge heißen *Bezugsbelegungen* von \mathcal{G} .

Solange aus dem Kontext hervorgeht, über welche Bezugsknotenmenge gerade gesprochen wird, werden die Elemente dieser Menge einfach als *Bezugsknoten* bezeichnet.

Der Kern der Knotenspannungsanalyse bei Netzwerken ist, daß die Menge der Kirchhoffschen Spannungsbelegungen durch Knotenpotentiale parametrisiert wird. Mit den folgenden Abbildungen gelingt es, diese Parameterdarstellung zu verallgemeinern.

Definition 5 (Parametrisierung von $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ durch Knotenbelegungen) Für einen Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$, eine Bezugsknotenmenge \mathcal{K}' von \mathcal{G} und eine Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'} \subset \mathcal{U}$ von \mathcal{G} sei

$$h_{\mathcal{G}, (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}} : \mathcal{U}^{\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}'} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{G}} \quad (1.9)$$

diejenige Abbildung, die jeder Familie $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}'} \subset \mathcal{U}$ die Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ mit

$$u_b := \phi_{\mathcal{A}_-(b)} \circ \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1} \quad (b \in \mathcal{Z})$$

zuordnet.

Eine Familie $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}'} \subset \mathcal{U}$, die als Argument von $h_{\mathcal{G}, (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ dient, setzt die Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ zu einer Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ von \mathcal{G} fort. Diese Knotenbelegung paßt zu der resultierenden Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ aus obiger Definition. Schon in Folgerung 3 wurde festgestellt, daß jede Zweigbelegung, zu der eine passende Knotenbelegung existiert, das Kirchhoffsche Spannungsgesetz erfüllt. Damit liegen die Bilder von $h_{\mathcal{G}, (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ wirklich in $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$.

Schrittweise wird die Injektivität und die Surjektivität der Abbildung $h_{\mathcal{G}, (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ gezeigt. Damit ist sie bei vorgegebener Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ eine Parametrisierung von $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$.

Zuvor noch eine Bemerkung zur Graphentheorie, auf deren Grundlage in Komponenten zerfallende Graphen leichter behandelbar sind. Bekanntlich erzeugt jede Einteilung der Knotenmenge eines **zusammenhängenden** Graphen in zwei Knotenklassen einen (nichtleeren) Schnitt. Diese Aussage läßt sich unter gewissen Einschränkungen auf Graphen verallgemeinern, die nicht zusammenhängend sind.

Lemma 3 (Bemerkung zur Graphentheorie) Sei \mathcal{G} ein Graph und \mathcal{K}' eine Bezugsknotenmenge von \mathcal{G} . Jede Knotenpartition $(\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-)$ mit $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}^+$ erzeugt einen **nichtleeren** allgemeinen Schnitt \mathcal{Z}' von \mathcal{G} .

Beweis: Zu jedem Knoten $n \in \mathcal{K}^-$ existiert ein Bezugsknoten n' , der in der selben Komponente wie n liegt. Diese Komponente sei mit $\widehat{\mathcal{G}}$ und ihre Knotenmenge mit $\widehat{\mathcal{K}}$ bezeichnet. Das Paar $(\mathcal{K}^+ \cap \widehat{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^- \cap \widehat{\mathcal{K}})$ ist also eine Knotenpartition von $\widehat{\mathcal{G}}$. Diese erzeugt einen nichtleeren Schnitt von $\widehat{\mathcal{G}}$, der in \mathcal{Z}' enthalten ist. \square

Die Injektivität von $h_{\mathcal{G},(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ ergibt sich aus dem nächsten Satz.

Satz 2 (Eindeutigkeit passender Knotenbelegungen) Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph, \mathcal{K}' eine Bezugsknotenmenge von \mathcal{G} und $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ eine Zweigbelegung von \mathcal{G} . Falls es zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ eine passende Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ gibt, so ist diese durch die Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ eindeutig bestimmt. Das heißt, zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ existiert keine zweite passende Knotenbelegung $(\psi_n)_{n \in \mathcal{K}}$, die auf \mathcal{K}' mit $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ übereinstimmt, jedoch nicht mit $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ identisch ist.

Beweis: Angenommen, es gibt $(\psi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ wie im Lemma beschrieben. Dann existiert wenigstens ein Knoten $\hat{n} \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}'$ mit $\psi_{\hat{n}} \neq \phi_{\hat{n}}$. Also bildet das Paar $(\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-)$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^- &:= \{n \in \mathcal{K} \mid \phi(n) \neq \psi(n)\} \\ \mathcal{K}^+ &:= \{n \in \mathcal{K} \mid \phi(n) = \psi(n)\} \end{aligned}$$

eine Klasseneinteilung von \mathcal{K} mit $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}^+$. Diese Klasseneinteilung erzeugt nach Lemma 3 einen nichtleeren allgemeinen Schnitt von \mathcal{G} . Damit existiert wenigstens ein Zweig b , der einen Knoten $n_- \in \mathcal{K}^-$ mit einem Knoten $n_+ \in \mathcal{K}^+$ verbindet. Sei $\sigma \in \{+, -\}$ dasjenige Vorzeichen, für das $\mathcal{A}(b) = (n_{+\sigma}, n_{-\sigma})$ gilt. Es folgt:

$$\phi_{n_-} = u_b^\sigma \circ \phi_{n_+} = u_b^\sigma \circ \psi_{n_+} = \psi_{n_-} \neq \phi_{n_-} \text{?!}$$

□

Beim Nachweis der Surjektivität von $h_{\mathcal{G},(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ ist es vorteilhaft, schrittweise vorzugehen.

Jede Zweigbelegung eines Waldes erfüllt das Kirchhoffsche Spannungsgesetz. Also muß sich, falls $h_{\mathcal{G},(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ surjektiv ist, für jede Zweigbelegung eine passende Knotenbelegung finden lassen. Das ist die Aussage des nächsten Lemmas.

Dieses Lemma wird dann benutzt, um die Surjektivität von $h_{\mathcal{G},(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ für allgemeine Graphen \mathcal{G} zu beweisen.

Lemma 4 (passende Knotenbelegung, Wald) Seien $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Wald, $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ eine Zweigbelegung von \mathcal{G} und $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ eine beliebige Bezugsbelegung von \mathcal{G} , dann kann $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ zu einer zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ passenden Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ fortgesetzt werden.

Beweis: Es gibt keinen Zweig, der zwei Knoten aus \mathcal{K}' miteinander verbindet und der Wald \mathcal{G} ist schlingenfrei, also kann sich aus der Bezugsbelegung zunächst kein Widerspruch zu (1.8) ergeben.

Die Fortsetzung der Bezugsbelegung zu einer passenden Knotenbelegung kann in Form eines Algorithmus angegeben werden.

Algorithmus 1 (Knotenbelegung)

Schritt $j = 0$: Man setze $\mathcal{K}_1^+ := \mathcal{K}'$ und $\mathcal{K}_1^- := \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}'$. Falls $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_1^+$ schon aus ganz \mathcal{K} besteht, ist die Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ die passende Knotenbelegung und der Algorithmus ist beendet. Andernfalls wird mit Schritt 1 fortgefahren.

Schritt $j = 1, \dots, |\mathcal{K}| - |\mathcal{K}'|$: Man wähle einen Zweig b_j aus dem nichtleeren Schnitt $(\mathcal{Z}_j^+, \mathcal{Z}_j^-)$, der nach Lemma 3 durch die Knotenpartition $(\mathcal{K}_j^+, \mathcal{K}_j^-)$ erzeugt wird. Sei

$\sigma \in \{+, -\}$ das Vorzeichen, für das $b_j \in \mathcal{Z}_j^\sigma$ gilt. Dann lege man für den Knoten $n := \mathcal{A}_{-\sigma}(b_j) \in \mathcal{K}_j^-$

$$\phi_n = \phi_{\mathcal{A}_{-\sigma}(b_j)} := u_{b_j}^\sigma \circ \phi_{\mathcal{A}_\sigma(b_j)} \quad (1.10)$$

fest und setze $\mathcal{K}_{j+1}^+ := \{n\} \cup \mathcal{K}_j^+$ und $\mathcal{K}_{j+1}^- := \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_{j+1}^+$.

Im Schritt $j = |\mathcal{K}| - |\mathcal{K}'|$ gilt $\mathcal{K}_{j+1}^+ = \mathcal{K}$, alle Knoten sind belegt und der Algorithmus endet. □

Die Zweige b_j ($j = 1, \dots, |\mathcal{K}| - |\mathcal{K}'|$) sind paarweise verschieden, da sie mit unterschiedlichen Knoten inzidieren. Aus der Graphentheorie ist jedoch bekannt, daß der Wald \mathcal{G} nur $|\mathcal{K}| - |\mathcal{K}'|$ Zweige hat. Damit gilt für jeden Zweig $b \in \mathcal{Z}$ die Gleichung (1.10) und die konstruierte Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ paßt zur Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ des Waldes \mathcal{G} . □

Der Algorithmus im vorstehenden Beweis zeigt auf einfache Weise, daß sich für jede Zweigbelegung eines Waldes eine vorgegebene Bezugsbelegung zu einer passenden Knotenbelegung fortsetzen läßt. Zur Konstruktion dieser Knotenbelegung erweist sich jedoch der folgende Algorithmus meist als günstiger. Der sich anschließende Satz sichert ab, daß der alternative Algorithmus das gleiche liefert wie der vorhergehende. Danach wird dann der unterbrochene Surjektivitätsbeweis für $h_{\mathcal{G}, (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ fortgesetzt.

Algorithmus 2 (passende Knotenbelegung, Wald) Gegeben seien ein Wald $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$, eine Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ von \mathcal{G} und eine Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ von \mathcal{G} .

Jeder Knoten $n \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}'$ ist mit genau einem Knoten $n' \in \mathcal{K}'$ verbindbar und zwar durch genau einen Weg. Sei (β, σ) der Durchlauf dieses Weges. Setze

$$\phi_n := u_{(\beta, \sigma)} \circ \phi_{n'}.$$

Satz 3 Die nach dem Algorithmus 1 aus einer Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ eines Graphen \mathcal{G} konstruierte Fortsetzung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ einer Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ paßt zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$.

Beweis: Nach Konstruktion ist $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ die einzige Fortsetzung von $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$, welche die Eigenschaft hat, daß für jeden Durchlauf (β, σ) von einem Knoten $n' \in \mathcal{K}'$ zu einem Knoten $n \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}'$ die Gleichung $u_{(\beta, \sigma)} = \phi_n \circ \phi_{n'}^{-1}$ gilt.

Nach Satz 4 existiert eine zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ passende Fortsetzung von $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$. Diese muß aber $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ sein, da sie nach Lemma 2 die oben erwähnte Eigenschaft hat. □

Auf dem Weg zum Beweis der Surjektivität von $h_{\mathcal{G}, (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ bewerkstelligt das folgende Lemma den Übergang von einem Wald zu einem allgemeinen Graphen.

Im zugehörigen Beweis wird dabei ein Algorithmus genutzt, der die Schnittspannungsanalyse der Netzwerktheorie verallgemeinert. Daß dieser Algorithmus ebenfalls eine Parametrisierung von $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ ermöglicht, wird jedoch erst gezeigt, wenn der Beweis zur Surjektivität von $h_{\mathcal{G}, (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ komplett ist.

Lemma 5 Seien $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph, $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}$ die Zweigmengung eines vollständigen Waldes \mathcal{G}' von \mathcal{G} und $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}'}$ eine beliebige Zweigbelegung des Waldes \mathcal{G}' . Dann gelten die folgenden zwei Aussagen.

- (i) Die Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}'}$ läßt sich zu genau einer Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ von \mathcal{G} fortsetzen, bei der für die Läufe (β, σ) aller Fundamentalmaschen von \mathcal{G} (bzgl. \mathcal{G}') die Gleichungen $u_{(\beta, \sigma)} = \mathbf{Id}$ gelten.
- (ii) Eine Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$, die zur Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}'}$ des Waldes \mathcal{G}' paßt, paßt ebenfalls zu der Fortsetzung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ aus (i).

Beweis: Zum Beweis von (i) wird ein Algorithmus angegeben, mit dem die erwähnte Fortsetzung konstruiert werden kann.

Algorithmus 3 (Verallgemeinerte Schnittspannungsanalyse) Gegeben seien wie in den Voraussetzungen des Lemmas ein Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ und eine Zweigmengung \mathcal{Z}' eines vollständigen Waldes \mathcal{G}' von \mathcal{G} . Außerdem sei eine beliebige Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}'}$ des vollständigen Waldes gegeben.

Zu jedem Verbindungszweig $b \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}'$ existiert genau eine Fundamentalmasche $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ mit $b \in \mathcal{Z}^+$. Alle übrigen Zweige $(\mathcal{Z}^+ \setminus \{b\}) \cup \mathcal{Z}^-$ sind Waldzweige.

Sei (β, σ) der Umlauf von $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ mit Startzweig b . Dieser werde zerlegt in $(b, +)$ und $(\beta', \sigma') := (\beta, \sigma)_{2, \dots, l(\beta)}$, so daß

$$(\beta, \sigma) = (b, +) \oplus (\beta', \sigma') \quad (1.11)$$

gilt. Das heißt (β', σ') ist der Durchlauf des orientierten Weges $(\mathcal{Z}^+ \setminus \{b\}, \mathcal{Z}^-)$. Man setze

$$u_b := u_{(\beta', \sigma')}^{-1}. \quad (1.12)$$

Genau für diese Wahl von u_b hat man

$$u_{(\beta, \sigma)} = u_{(\beta', \sigma')} \circ u_{(b, +)} = u_{(\beta', \sigma')} \circ u_{(\beta', \sigma')}^{-1} = \mathbf{Id}.$$

Damit ist die Existenz und die Eindeutigkeit der Fortsetzung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ gezeigt.

Nun wird noch die zweite Aussage des Lemmas bewiesen. Sei also $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ eine Knotenbelegung, die zu der im Algorithmus vorgegebenen Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ paßt.

Die Untersuchung der in der Beschreibung des Algorithmus exemplarisch herausgegriffenen Fundamentalmasche $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ wird zum Nachweis von (ii) fortgesetzt.

Der Startknoten n von (β', σ') stimmt mit dem Zielknoten von b überein, und der Zielknoten n' von (β', σ') stimmt mit dem Startknoten von b überein.

Lemma 2 angewandt auf den Wald \mathcal{G}' ergibt die Gleichung

$$u_{(\beta', \sigma')} = \phi_{n'} \circ \phi_n^{-1}.$$

Damit erhält man aus (1.12)

$$u_b = u_{(\beta', \sigma')}^{-1} = \phi_n \circ \phi_{n'}^{-1} = \phi_{\mathcal{A}_-(b)} \circ \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}.$$

Also paßt die Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ zur Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$. □

Der folgende Satz zeigt schließlich, daß sich für jede Kirchhoffsche Zweigbelegung eines Graphen eine Bezugsbelegung zu einer passenden Knotenbelegung fortsetzen läßt. Damit ist dann die Surjektivität von $h_{\mathcal{G},(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ bewiesen.

Satz 4 Seien $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph, $\mathcal{G}' = (\mathcal{Z}', \mathcal{K}, \mathcal{A}')$ ein vollständiger Wald von \mathcal{G} , $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ eine Zweigbelegung von \mathcal{G} und $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ eine Bezugsbelegung von \mathcal{G} . Unter diesen Voraussetzungen sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ läßt sich zu einer Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ fortsetzen, die zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ paßt.
- (ii) Die Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ erfüllt das Kirchhoffsche Spannungsgesetz.
- (iii) Für die Durchläufe (β, σ) jeder Fundamentalmasche von \mathcal{G} bzgl. \mathcal{G}' gelten die Gleichungen $u_{(\beta, \sigma)} = \mathbf{Id}$.

Beweis:

(i) \Rightarrow (ii): Diese Implikation ist in der Folgerung 3 enthalten.

(ii) \Rightarrow (iii): Im Kirchhoffschen Spannungsgesetz wird die Gültigkeit der Gleichungen $u_{(\beta, \sigma)} = \mathbf{Id}$ für die Durchläufe (β, σ) aller Maschen von \mathcal{G} gefordert und Fundamentalmaschen sind spezielle Maschen.

(iii) \Rightarrow (i): Laut Lemma 4 läßt sich $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ zu einer zur Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}'}$ des Waldes \mathcal{G}' passenden Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ fortsetzen. Außerdem muß mit der Voraussetzung (iii) die Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ die in Lemma 5 postulierte eindeutige Fortsetzung von $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}'}$ sein. Also paßt $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ auch zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$. \square

Folgerung 4 (Parametrisierung von $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$) Seien \mathcal{G} ein Graph, \mathcal{K}' eine Bezugs-knotenmenge von \mathcal{G} und $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'} \subset \mathcal{U}$ eine Bezugsbelegung von \mathcal{G} . Die Abbildung $h_{\mathcal{G},(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ aus Definition 5 ist bijektiv, also parametrisiert $h_{\mathcal{G},(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}$ die Menge $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$.

\square

Folgerung 5 (Verallgemeinerte Schnittspannungsanalyse) Sei \mathcal{G} ein Graph mit Zweigmengen \mathcal{Z} und $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}$ die Zweigmengen eines vollständigen Waldes von \mathcal{G} . Die Abbildung

$$h_{\mathcal{G},\mathcal{Z}'} : \mathcal{U}^{\mathcal{Z}'} \rightarrow \mathcal{U}^{\mathcal{Z}},$$

die jede Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}'}$ des vollständigen Waldes \mathcal{G}' nach Algorithmus 3 zu einer Zweigbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ von \mathcal{G} fortsetzt, ist bijektiv.

Beweis: Man wähle eine beliebige Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ von \mathcal{G} . Dann setzt die bijektive Abbildung

$$f := h_{\mathcal{G},(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}} \circ h_{\mathcal{G}',(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}}^{-1}$$

Zweigbelegungen von \mathcal{G}' zu Zweigbelegungen von \mathcal{G} fort. Diese erfüllen das Kirchhoffsche Spannungsgesetz. Speziell gilt (iii) von Satz 4. Nach Satz 5 ist eine solche Fortsetzung eindeutig. Damit gilt $f = h_{\mathcal{G},\mathcal{Z}'}$. \square

1.4 Eine Modifikation des Kirchhoffschen Stromgesetzes

In diesem Abschnitt wird ein modifiziertes Kirchhoffsches Stromgesetz vorgestellt, mit welchem die bei der netzwerkähnlichen Modellierung von Stabtragwerken auftretenden Kräftegleichgewichte formuliert werden können. Ein Zusammenhang zwischen dem modifizierten Kirchhoffschen Stromgesetz und dem Kirchhoffschen Stromgesetz in der Originalfassung wird hergestellt, welcher die Nutzung der Maschenstromanalyse für Tragwerke gestattet.

Die im vorhergehenden Abschnitt eingeführte Gruppe (\mathcal{U}, \circ) sei hier eine Automorphismengruppe eines reellen Vektorraumes \mathfrak{L} . Aus der Netzwerktheorie wird für \mathfrak{L} die Bezeichnung *Stromraum* übernommen. Außerdem sei für diesen Abschnitt ein Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ vorgegeben. Die Familien $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathfrak{L}$ heißen wie üblich *Strombelegungen* von \mathcal{Z} .

Definition 6 (Modifiziertes Kirchhoffsches Stromgesetz) Gelten mit einer Spannungsbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}$ und einer Strombelegung $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathfrak{L}$ für alle Inzidenzschnitte $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von \mathcal{G} die Gleichungen

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} i_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} u_b(i_b) = 0,$$

so sagt man, daß $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ das durch $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ modifizierte Kirchhoffsche Stromgesetz erfüllt.

Die Menge aller Strombelegungen von \mathcal{Z} , die das durch $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ modifizierte Kirchhoffsche Stromgesetz erfüllen, bekommt das Symbol $\mathcal{H}_{\mathfrak{L}, (u_b)_{b \in \mathcal{Z}}}$.

Klar ist, daß für $u_b = \mathbf{Id}$ ($\forall b \in \mathcal{Z}$) das durch $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ modifizierte Kirchhoffsche Stromgesetz in die Originalfassung des Kirchhoffschen Stromgesetzes übergeht. Denn der Schnitttraum eines Graphen wird ja durch die Vektoren $[\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-]$ zu den Inzidenzschnitten $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ des Graphen aufgespannt.

Fordert man statt $u_b = \mathbf{Id}$ ($\forall b \in \mathcal{Z}$) nur noch, daß $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ dem verallgemeinerten Kirchhoffschen Spannungsgesetz genügt, so läßt sich immernoch ein Zusammenhang zwischen dem durch $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ modifizierten Kirchhoffschen Stromgesetz und dem Kirchhoffschen Stromgesetz in der Originalfassung herstellen.

Definition 7 ($(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ -Transformierte) Für eine gegebene Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathcal{U}$ von \mathcal{G} und eine Strombelegung $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathfrak{L}$ heißt $(i'_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathfrak{L}$ mit

$$i'_b := \phi_{\mathcal{A}_+(b)}(i_b)$$

die $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ -Transformierte von $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}}$. Der Vektorraumautomorphismus $\text{Tr}_{(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}}$ von \mathfrak{L} , der jeder Strombelegung $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ ihre $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ -Transformierte zuordnet, heißt $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ -Transformation.

Satz 5 (modifiziertes Kirchhoffsches Stromgesetz) Sei $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}$ eine Kirchhoffsche Spannungsbelegung von \mathcal{G} und $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ eine zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ passende Knotenbelegung.

Eine Strombelegung $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{I}$ erfüllt genau dann das Kirchhoffsche Stromgesetz, wenn die $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ -Transformierte von $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ das durch $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ modifizierte Kirchhoffsche Stromgesetz erfüllt.

Beweis: Wie in der Definition 7 wird die $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ -Transformierte von $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ mit $(i'_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ bezeichnet.

Sei $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ der Inzidenzschnitt zu einem Knoten $n \in \mathcal{K}$. Dann gilt $\mathcal{A}_+(b) = n$ für alle Zweige $b \in \mathcal{Z}^+$ und $\mathcal{A}_-(b) = n$ für alle Zweige $b \in \mathcal{Z}^-$. Beachtet man außerdem, daß sich nach der Definition 3 die Spannungsbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ aus $u_b = \phi_{\mathcal{A}_-(b)} \circ \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}$ ($\forall b \in \mathcal{Z}$) ergibt, so erhält man die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} i'_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} u_b(i'_b) &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} i'_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \underbrace{\phi_{\mathcal{A}_-(b)} \circ \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}}_{=u_b} i'_b \\ &= \phi_n \left(\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \underbrace{\phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}}_{=\phi_n^{-1}}(i'_b) - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}(i'_b) \right) \\ &= \phi_n \left(\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} i_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} i_b \right). \end{aligned}$$

Da ϕ_n Vektorraumautomorphismus von \mathcal{I} ist, sind also die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} i'_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} u_b(i'_b) &= 0 \\ \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} i_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} i_b &= 0 \end{aligned}$$

einander äquivalent. Für alle Inzidenzschnitte von \mathcal{G} ergeben sich diese Äquivalenzen. Somit ist das Lemma bewiesen. \square

Da für Kirchhoffsche Spannungsbelegungen das modifizierte Kirchhoffsche Stromgesetz auf das Kirchhoffsche Stromgesetz zurückgeführt ist, kann $\mathcal{H}_{\mathcal{I},(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}}$ leicht parametrisiert werden.

Folgerung 6 (Modifizierte Maschenstromanalyse) Sei $(u_b)_{b \in \mathcal{U}}$ eine Kirchhoffsche Spannungsbelegung von \mathcal{G} mit passender Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathcal{U}$ und $M : \mathcal{I}^{\mathcal{Z}'} \rightarrow \mathcal{I}^{\mathcal{Z}}$ die zu einem Verbindungszweigsystem \mathcal{Z}' von \mathcal{G} gehörige Maschenmatrix.

Dann wird $\mathcal{H}_{\mathcal{I},(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}}$ durch $\text{Tr}_{(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}} \circ \text{TM}$ parametrisiert, das heißt, die Abbildung

$$\text{Tr}_{(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}} \circ \text{TM} : \mathcal{I}^{\mathcal{Z}'} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{I},(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}}$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

Kapitel 2

Grundzüge der Theorie der Stabtragwerke

2.1 Bemerkungen zu den mathematischen Grundlagen

Raum und Zeit: In der klassischen Mechanik wird der Anschauungsraum durch einen orientierten, dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbf{E}^3 modelliert. Wie in der Literatur üblich (siehe zum Beispiel [2]), wird dieser auch hier durch den \mathbb{R}^3 repräsentiert. Der \mathbb{R}^3 sei dabei mit dem euklidischen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad (x, y \in \mathbb{R}^3)$$

und dem Vektorprodukt

$$[x, y] = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \in \mathbb{R}^3 \quad (x, y \in \mathbb{R}^3)$$

ausgestattet. Weiterhin trage der \mathbb{R}^3 diejenige Orientierung, in der die kanonische Basis $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ als positiv orientiert ausgezeichnet ist.

Ein Paar $(p_0, (b_1, b_2, b_3))$ eines Punktes $p_0 \in \mathbb{R}^3$ und einer Basis (b_1, b_2, b_3) des \mathbb{R}^3 wird als affines Bezugssystem oder kurz als Bezugssystem des \mathbb{R}^3 bezeichnet. In [6] ist dargestellt, daß ein Bezugssystem $(p_0, (b_1, b_2, b_3))$ gleichwertig durch das ihm zugehörige Viertupel (p_0, p_1, p_2, p_3) der (affin unabhängigen) Punkte $p_0, p_i = p_0 + b_i$ ($i = 1, 2, 3$) spezifiziert werden kann. Ein Bezugssystem heißt orthonormiert bzw. positiv orientiert, falls die zugehörige Basis orthonormiert bzw. positiv orientiert ist. Die „im Nullpunkt angeheftete“ kanonische Basis $((0, 0, 0), ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)))$ wird im weiteren *kanonisches Bezugssystem* genannt.

Zur Modellierung der Zeit wird in der klassischen Mechanik ein eindimensionaler reeller und gerichteter Raum herangezogen. Wie in [2] wird sie auch hier durch die reelle Achse \mathbb{R} modelliert.

Kraft und Moment: In der Newtonschen Mechanik, wie sie zum Beispiel in [12] beschrieben wird, sind Kräfte physikalische Grundgrößen, die sich Beobachtern nur durch ihre Wirkung auf Gegenstände offenbaren (zum Beispiel Änderung des Impulses eines Körpers oder Deformation eines Körpers).

Eine Kraft wird durch einen Tangentialvektor des \mathbb{R}^3 (als Repräsentant des \mathbf{E}^3), also durch einen Punkt des \mathbb{R}^3 und einen Vektor des \mathbb{R}^3 modelliert. Der Punkt

wird *Angriffspunkt* der Kraft und der Vektor *Kraftvektor* genannt. Üblicherweise unterscheidet man dabei nicht streng zwischen Kraft und Kraftvektor, da meistens der Angriffspunkt der Kraft klar ist. Kräfte mit dem gleichen Angriffspunkt $p \in \mathbb{R}^3$ summieren sich (entsprechend der Addition im $T_p\mathbb{R}^3$) in ihrer Wirkung.

In der Punktmassenmechanik definiert man das Moment $M \in \mathbb{R}^3$ einer Kraft $F \in \mathbb{R}^3$ mit Angriffspunkt $p \in \mathbb{R}^3$ bzgl. eines Punktes $p_0 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$M := [p - p_0, F].$$

In [3] (S. 175) ist erwähnt, daß in der Kontinuumsmechanik das Moment M bzgl. eines Punktes p_0 wie die Kraft als physikalische Grundgröße gewertet werden kann. Für diese Grundgröße gilt beim Wechsel des Bezugspunktes das folgende Varignon-sche Momentenprinzip.

Ist $M \in \mathbb{R}^3$ das Moment bzgl. $p_0 \in \mathbb{R}^3$ und $F \in \mathbb{R}^3$ die in p_0 angreifende Kraft, so ergibt sich das Moment bzgl. eines Punktes $p'_0 \in \mathbb{R}^3$ durch die Gleichung

$$M' := M + [p_0 - p'_0, F].$$

Momente, die sich auf den gleichen Punkt beziehen, addieren sich in ihrer Wirkung. Bemerket sei, daß Bertram selber in [3] nicht Kraft und Moment als Grundgrößen zum Modellieren der Dynamik von Körpern nutzt, sondern Arbeitsfunktionale, die möglichen Bewegungen von Körpern Zahlen zuordnen.

Bewegung der Anschlüsse von Tragwerkelementen: Vereinfachend wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, daß Stabtragwerkelemente durch eine Beziehung zwischen den Bewegungen ihrer Anschlüsse und den dabei dort auftretenden Kraftgrößen (Zeitverläufe von Kraft und Moment) beschrieben werden können. Ein Stabtragwerk besteht dann aus mehreren Tragwerkelementen, die an ihren Anschlüssen mechanisch fest miteinander verbunden sind.

Die momentane Lage eines Anschlusses eines Tragwerkelements kann durch ein positiv orientiertes und orthonormiertes Bezugssystem beschrieben werden. Dies ist in Bild 2.1 am Beispiel eines Anschlusses eines L-Trägers angedeutet.

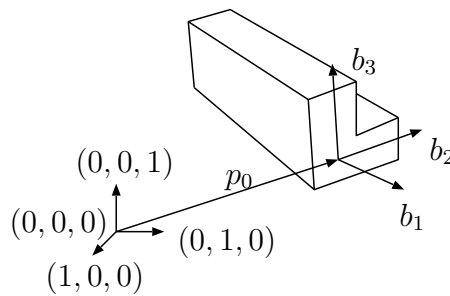


Abbildung 2.1: Beschreibung der Lage eines Anschlusses eines L-Trägers durch ein positiv orientiertes und orthonormiertes Bezugssystem $(p_0, (b_1, b_2, b_3))$.

Eine orientierungserhaltende Isometrie ϕ des \mathbb{R}^3 überführt das kanonische Bezugssystem $((0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ in ein positiv orientiertes und orthonormiertes Bezugssystem

$$(p_0, p_1, p_2, p_3) = (\phi(0), \phi(1, 0, 0), \phi(0, 1, 0), \phi(0, 0, 1)). \quad (2.1)$$

Außerdem existiert zu jedem positiv orientierten und orthonormierten Bezugssystem (p_0, p_1, p_2, p_3) genau eine orientierungserhaltende Isometrie ϕ , für welche die Gleichung (2.1) gilt.

In dieser Weise sind die positiv orientierten, orthonormierten Bezugssysteme des \mathbb{R}^3 eineindeutig den orientierungserhaltenden Isometrien des \mathbb{R}^3 zugeordnet (siehe hierzu auch [6]).

In dieser Arbeit wird zur Beschreibung der momentanen Lage eines Anschlusses eines Tragwerkelements statt eines positiv orientierten, orthonormierten Bezugssystems die diesem zugeordnete orientierungserhaltende Isometrie genutzt.

Entsprechend werden die orientierungserhaltenden Isometrien des \mathbb{R}^3 hier als *Lagen* bezeichnet, die Menge aller Lagen erhält das Symbol **Lag**. In der Literatur heißen die Elemente von **Lag** Bewegungen. Der Begriff Bewegung paßt im Rahmen dieser Arbeit jedoch besser zur zeitlichen Änderung der Lage eines Anschlusses. Es werden also hier die Elemente der Menge **Bew** := $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{Lag})$ als *Bewegungen* bezeichnet.

Die Lagen bilden eine Permutationsgruppe des \mathbb{R}^3 . Diese algebraische Eigenschaft von **Lag** wird bei der strukturellen Untersuchung von Stabtragwerken von Nutzen sein.

Jede Lage $u \in \mathbf{Lag}$ läßt sich eindeutig in der Form $u(x) = u(0) + Du x$ darstellen, wobei $u(0) \in \mathbb{R}^3$ ein Verschiebungsvektor ist und Du als linearer Anteil der Abbildung u eine orthogonale Matrix ($Du^{-1} = T(Du)$) mit positiver Determinante ist¹.

Wie schon angedeutet, wird zur Untersuchung der Kinematik eines Tragwerkes die Menge der Bewegungen **Bew** = $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ anstelle von **Lag** genutzt. Die Gruppeneigenschaften von **Lag** übertragen sich auf **Bew**, wenn man die Verkettung zweier Bewegungen zeitpunktweise erklärt. Für $u_1, u_2 \in \mathbf{Bew}$ wird also $(u_2 \circ u_1) \in \mathbf{Bew}$ durch

$$(u_1 \circ u_2)[t] := u_1[t] \circ u_2[t]$$

definiert. Die skalaren Argumente, welche für Zeitpunkte stehen, werden durch eckige Klammern gekennzeichnet. Das hilft, sie von räumlichen Argumenten (Raumpunkte und weiter unten auch Raumkurven) zu unterscheiden.

Identifiziert man die Lagen mit den konstanten Bewegungen, so bildet **Lag** eine Untergruppe von **Bew**. In diesem Sinne ist **Id** $\in \mathbf{Lag}$ auch das neutrale Element von **Bew**.

Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ heißen *Trajektorien*. Sie stellen durch die Zeit parametrisierte Raumkurven dar. Die Elemente aus \mathbb{R}^3 werden mit den konstanten Trajektorien identifiziert.

Die Bewegungen operieren auf der Menge der Trajektorien genau so, wie die Lagen auf \mathbb{R}^3 operieren. Die Anwendung einer Bewegung $u \in \mathbf{Bew}$ auf eine Trajektorie $x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ ergebe dabei wieder eine Trajektorie $u(x)$, die zeitpunktweise durch

$$u(x)[t] := u[t](x[t]) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

definiert ist.

¹Das heißt Du ist Element der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$.

Verbindung von Tragwerkelementen: Viele Tragwerkelemente haben zwei Anschlüsse (zB. Balken, Stäbe, Federn usw.). Deshalb werden die Anschlüsse eines Tragwerkelements so zu Paaren zusammengefaßt, daß jeder Anschluß mindestens in einem Paar enthalten ist. Bei einem Tragwerkelement mit zwei Anschlüssen kommt man dann gerade mit einem solchen Paar aus, während man für ein Tragwerkelement mit drei oder vier Anschlüssen mindestens zwei solche Anschlußpaare benötigt.

Im Weiteren wird von Tragwerkelementen mit zwei Anschlüssen ausgegangen, und es wird nicht zwischen den Tragwerkelementen und ihren Anschlußpaaren unterschieden. Zur Behandlung eines Tragwerkelements mit mehr Anschlüssen sind die Definitionen und Aussagen auf dessen Anschlußpaare zu übertragen.

Um die zwei Anschlüsse eines Tragwerkelements zu unterscheiden, wird der eine als *positiver Anschluß* (auch (+)-Anschluß) und der andere als *negativer Anschluß* (auch (-)-Anschluß) bezeichnet. Die momentane Lage eines Tragwerkelements im Anschauungsraum wird durch ein Paar $(u_+, u_-) \in \mathbf{Lag}^2$ der Lage u_+ des positiven Anschlusses und der Lage u_- des negativen Anschlusses (im \mathbb{R}^3) modelliert. Bei der Untersuchung der zeitlichen Bewegung der Anschlüsse des Tragwerkelements im Anschauungsraum nutzt man dann Paare von Bewegungen $(u_+, u_-) \in \mathbf{Bew}^2$ anstatt von Lagen des \mathbb{R}^3 .

Gemäß den Darlegungen in [9], können die zur Beschreibung eines Tragwerkelements heranzuziehenden Kraftgrößen wie folgt durch das sogenannte Schnittprinzip veranschaulicht werden.

Das Tragwerkelement wird aus dem Tragwerk herausgelöst, ohne daß dabei der Deformationszustand des umgebenden Tragwerkes geändert wird. Dazu sind dem restlichen Tragwerk an den Orten, an denen das entfernte Tragwerkelement angeschlossen war, Ersatzkraftgrößen, sogenannte Schnittkraftgrößen, einzuprägen.

Die Schnittkraft die am Ort des positiven Anschlusses eingepreßt werden muß, wird im folgenden als *Kraft des Tragwerkelements* bezeichnet und das entsprechende Schnittmoment in Bezug auf den Ort des positiven Anschlusses als *Moment des Tragwerkelements*.

Bei dieser Betrachtung braucht nicht zwischen Momentankraftgrößen und zeitlichen Kraftgrößenverläufen unterschieden zu werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß entlang eines Tragwerkelements keine Streckenlasten auftreten. Die Trägheit eines Balkens kann bei Bedarf näherungsweise durch mit den Balkenenden mechanisch fest verbundene, starre Körper berücksichtigt werden, und Kraftgrößenbeläge können näherungsweise durch auf die Anschlüsse einwirkende Einzelkraftgrößen modelliert werden.

Die Verbindung des positiven Anschlusses eines Tragwerkelements 1 mit dem negativen Anschluß eines Tragwerkelements 2 wird durch die geometrische Restriktion

$$u_{1+} = u_{2-}$$

für die Bewegungen (u_{1+}, u_{1-}) und (u_{2+}, u_{2-}) der Tragwerkelemente modelliert.

Allgemeiner gelte für den Fall, daß $n \in \mathbb{N}$ Tragwerkelemente $1, \dots, n$ miteinander verbunden sind, und zwar jeweils das i -te ($i \in \{1, \dots, n\}$) mit seinem $\sigma(i)$ -Anschluß ($\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{+, -\}$), daß die Bewegungen (u_{i+}, u_{i-}) der Tragwerkelemente der geometrischen Restriktion

$$u_{i\sigma(i)} = u_{j\sigma(j)} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\})$$

genügen.

Eine weitere physikalische Erfahrungstatsache ist, daß sich die Schnittkraftgrößen an der Verbindungsstelle, die zu den n Tragwerkelementen gehören, aufheben. Dadurch ergeben sich für die Kraftgrößen dieser Tragwerkelemente zwei zusätzliche Relationen — das Kräftegleichgewicht und das Momentengleichgewicht, zusammengefaßt unter dem Namen Kraftgrößengleichgewicht.

Zunächst wird auf die Frage eingegangen, welche Schnittkraftgrößen an der Verbindungsstelle sich durch die Kraftgrößen der Tragwerkelemente ergeben.

Definitionsgemäß sind das für $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\sigma(i) = +1$ die Kraftgrößen F_i und M_i . Für $\sigma(i) = -1$ müssen die Kraftgrößen des Tragwerkelementes in die Schnittkraftgrößen an der Verbindungsstelle umgerechnet werden. Dies wird an dem Tragwerk mit herausgeschnittenem i -ten Tragwerkelement getan. Nach dem Prinzip „actio=reactio“ ergibt sich die Schnittkraft an der Verbindungsstelle zu $-F_i$, und unter zusätzlicher Beachtung des Varignonschen Prinzips ergibt sich das Schnittmoment an der Verbindungsstelle bzgl. des Raumpunktes $u_{i-}(0)$ zu

$$-(M_i + [u_{i+}(0) - u_{i-}(0), F_i]).$$

Zusammenfassend erhält man für das Kraftgrößengleichgewicht in der Verbindungsstelle die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \sigma^{-1}(+1)} F_i - \sum_{i \in \sigma^{-1}(-1)} F_i &= 0 \\ \sum_{i \in \sigma^{-1}(+1)} M_i - \sum_{i \in \sigma^{-1}(-1)} (M_i + [u_{i+}(0) - u_{i-}(0), F_i]) &= 0. \end{aligned}$$

2.2 Der starre Körper als Tragwerkelement

Träge Massen sind die wichtigsten Objekte, die das dynamische Verhalten von Tragwerken bestimmen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur starre Körper als träge Massen zugelassen. Üblicherweise wird das Bewegungsgesetz starrer Körper durch die Eulersche Gleichung beschrieben. In einer Kombination der Darstellungen aus [2] und [3] wird hier die Eulersche Gleichung aus dem Newtonschen Gesetz der Kontinuumsmechanik abgeleitet.

Der starre Körper selber wird durch ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ modelliert, auf dem eine positive, beschränkte und glatte Dichtefunktion $\rho \in C^\infty(G, \mathbb{R})$ erklärt ist. Die Zahl, die sich aus dem Volumenintegral

$$m := \int_{x \in G} \rho(x) \, dV$$

ergibt, steht für die Masse des Körpers. Es gelte

$$\int_{x \in G} x \rho(x) \, dV = 0,$$

das heißt der Schwerpunkt des Körpers liegt im Nullpunkt des \mathbb{R}^3 . (Diese Forderung ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da sie durch eine Verschiebung $G' := v(G)$, $\rho' := \rho \circ v^{-1}$ mit einem $v \in \mathbf{Lag}$ immer erfüllt werden kann und sich außerdem

aus dem Übergang von G und ρ zu G' und ρ' keine wesentlichen Konsequenzen für die folgenden Betrachtungen ergeben, außer daß sich die Gleichungen vereinfachen.) Eine Bewegung $u \in \mathbf{Bew}$, eingeschränkt auf G , steht für eine Bewegung des starren Körpers im Anschauungsraum. Durch diese Bewegung wird das Gebiet G zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ isometrisch und orientierungserhaltend in den \mathbb{R}^3 eingebettet, wie man das von einem starren Körper erwartet. Es wird gefordert, daß für u die Newtonschen Gleichungen der Kontinuumsmechanik

$$F = \int_{x \in G} \ddot{u}(x) \rho(x) dV \quad (2.2)$$

$$M = \int_{x \in G} [u(x), \ddot{u}(x)] \rho(x) dV \quad (2.3)$$

gelten, wobei F die gesamte am starren Körper angreifende Kraft und M das gesamte auf den starren Körper wirkende Moment bzgl. $0 \in \mathbb{R}^3$ sind. Im Newtonschen Sinne wird also vorausgesetzt, daß das kanonische Bezugssystem des \mathbb{R}^3 ein Inertialsystem ist.

Gleichung (2.2) beschreibt wegen

$$\begin{aligned} F &= \int_{x \in G} \ddot{u}(x) \rho(x) dV \\ &= \int_{x \in G} (\ddot{u}(0) + D\ddot{u} x) \rho(x) dV \\ &= \ddot{u}(0) \int_{x \in G} \rho(x) dV + D\ddot{u} \underbrace{\int_{x \in G} x \rho(x) dV}_{=0} \\ &= \ddot{u}(0) m \end{aligned}$$

das Bewegungsgesetz einer Punktmasse mit der Masse m am Ort des Schwerpunktes $u(0)$ des starren Körpers, auf die die Kraft F wirkt.

Gleichung (2.3) lautet mit $u(x) = u(0) + Du x$

$$M = \int_{x \in G} [u(0) + Du x, \ddot{u}(0) + D\ddot{u} x] \rho(x) dV.$$

Die Integrale über die in x linearen Glieder, die beim Ausmultiplizieren des Vektorproduktes entstehen, verschwinden. (Das ist klar, denn ist allgemein $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear, so gilt $\int_{x \in G} A(x) \rho(x) dV = A(\int_{x \in G} x \rho(x) dV) = A(0) = 0$). Übrig bleibt

$$M = m [u(0), \ddot{u}(0)] + \int_{x \in G} [Du x, D\ddot{u} x] \rho(x) dV.$$

Der erste Term $[u(0), m\ddot{u}(0)] = [u(0), F]$ ist das auf $0 \in \mathbb{R}^3$ bezogene Moment der Kraft F , das sich auch aus der oben angesprochenen Punktmassenbewegung ergibt. Der zweite Term $\int_{x \in G} [Du x, D\ddot{u} x] \rho(x) dV$ entspricht dem für die reine Drehbewegung Du um den Nullpunkt benötigten Moment bzgl. $0 \in \mathbb{R}^3$. Für die Bewegung Du , bei der der Schwerpunkt des Körpers in Ruhe bleibt, muß die am Körper angreifende Kraft Null sein.

Damit lassen sich die Kraftgrößen aufteilen in die für die Schwerpunktsbewegung benötigten

$$\begin{aligned} F_s &= m\ddot{u}(0), \\ M_s &= [u(0), F_s] \end{aligned}$$

und die für eine reine Drehbewegung um $0 \in \mathbb{R}^3$ benötigten

$$\begin{aligned} F_d &= 0, \\ M_d &= \int_{x \in G} [Du\ x, D\ddot{u}\ x] \rho(x) dV, \end{aligned} \quad (2.4)$$

so daß die Bilanzgleichungen $M = M_s + M_d$ und $F = F_s + F_d$ gelten.

Im weiteren wird die Differentialgleichung (2.4), durch die der zeitliche Verlauf der reinen Drehbewegung $Du \in C^\infty(\mathbb{R}, SO(3))$ bestimmt wird, untersucht.

Es erweist sich als günstig, das Moment M_d als zeitliche Ableitung des Drehimpulses

$$L := \int_{x \in G} [Du\ x, D\dot{u}\ x] \rho(x) dV \quad (2.5)$$

zu schreiben, was wegen

$$\dot{L} = \int_{x \in G} \underbrace{([D\dot{u}\ x, D\dot{u}\ x])}_{=0} + [Du\ x, D\ddot{u}\ x] \rho(x) dV = M_d$$

gerechtfertigt ist.

Bevor der Integralausdruck (2.5) weiter vereinfacht wird, muß kurz auf zeitliche Ableitungen von Drehbewegungen $Du \in C^\infty(\mathbb{R}, SO(3))$ eingegangen werden. Durch zeitliches Ableiten von $\mathbf{Id} = Du \top Du$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= D\dot{u} \top Du + Du \top D\dot{u} \\ &= D\dot{u} \top Du + \top(D\dot{u} \top Du). \end{aligned}$$

Das heißt, die Matrix²

$$\Omega := D\dot{u} \top Du \quad (2.6)$$

ist Element des dreidimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{so}(3)$ der schiefssymmetrischen Matrizen.

Jeder schiefssymmetrischen linearen Abbildung $A \in \mathfrak{so}(3)$ ist eineindeutig ein Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet, so daß

$$Ax = [a, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

gilt. Durch Nachrechnen bestätigt man

$$\begin{aligned} a_1 &= A_{32} = -A_{23}, \\ a_2 &= A_{13} = -A_{31}, \\ a_3 &= A_{21} = -A_{12}. \end{aligned}$$

Diejenigen Zeitfunktion $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, für die

$$\Omega = [\omega, \bullet] \quad (2.7)$$

gilt, heißt *Winkelgeschwindigkeit* der Drehbewegung Du . Die Bedeutung der Winkelgeschwindigkeit liest man wie folgt aus der Differentialgleichung

$$D\dot{u} = \underbrace{D\dot{u} \top Du}_{=\mathbf{Id}} Du = [\omega, \bullet] Du \quad (2.8)$$

²Erstens wird hier nicht zwischen 3×3 -Matrizen und den zugehörigen linearen Abbildungen des \mathbb{R}^3 in sich unterschieden, und zweitens werden hier matrizenwertige Zeitfunktionen auch einfach Matrizen genannt.

ab. Die Drehung Du bildet zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ die Einheitsphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ auf sich ab. Dabei stehen mit $e \in S^2$ die Geschwindigkeitsvektoren

$$D\dot{u}(e)[t] = [\omega[t], Du(e)[t]]$$

senkrecht auf den Vektoren $Du(e)[t]$ und $\omega[t]$. Den maximalen Umfangsgeschwindigkeitsbetrag erreichen diejenigen Vektoren $Du(e)[t]$, die senkrecht zur momentanen Winkelgeschwindigkeit $\omega[t]$ liegen. Für diese Vektoren ist die Umfangsgeschwindigkeit gerade gleich dem Betrag von $\omega[t]$.

Das Bild des kanonischen Bezugssystems unter der Drehbewegung Du ist ein mit dem gedrehten Körper mitbewegtes Bezugssystem. Dieses wird *körperfestes Bezugssystem* genannt.

Die Koordinatisierung von Ω bezüglich des körperfesten Bezugssystems ergibt die Matrix

$$\begin{aligned} \Omega' &= \mathbb{T} Du \Omega Du \\ &= \mathbb{T} Du D\dot{u} \mathbb{T} Du Du \\ &= \mathbb{T} Du D\dot{u}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Aus der zweiten Darstellung (2.7) von Ω erhält man außerdem die Gleichung

$$\begin{aligned} \Omega' &= \mathbb{T} Du [\omega, \bullet] Du \\ &= [\mathbb{T} Du \omega, \mathbb{T} Du Du \bullet] \\ &= [\mathbb{T} Du \omega, \bullet] \\ &= [\omega', \bullet]. \end{aligned}$$

Dabei ist $\omega' := \mathbb{T} Du \omega$ der Koordinatenvektor der Winkelgeschwindigkeit ω bzgl. des körperfesten Bezugssystems.

Vergleicht man die zwei eben hergeleiteten Darstellungen für Ω' , so erkennt man, daß die Gleichung

$$[\omega', \bullet] = \mathbb{T} Du D\dot{u}$$

gilt.

Damit läßt sich nun die definierende Gleichung (2.5) für den Drehimpuls vereinfachen. Zunächst kann man mittels ω' den Term $D\dot{u}$ eliminieren, denn es gilt die Gleichungskette

$$\begin{aligned} [Du x, D\dot{u} x] &= [Du x, Du \mathbb{T} Du D\dot{u} x] \\ &= [Du x, Du [\omega', x]] \\ &= Du [x, [\omega', x]] \\ &= Du(\mathbb{T} x x \omega' - x \mathbb{T} x \omega'). \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (2.5) ergibt sich so die Darstellung

$$L = Du \int_{x \in G} (\mathbb{T} x x \mathbf{Id} - x \mathbb{T} x) \rho(x) dV \omega'.$$

für den Drehimpuls. Die Matrix

$$J := \int_{x \in G} (\mathbb{T} x x \mathbf{Id} - x \mathbb{T} x) \rho(x) dV,$$

die keine Bewegungsgrößen mehr enthält, faßt die für die Drehbewegung wesentlichen Körpereigenschaften zusammen. Man nennt J *Trägheitsmoment* des starren Körpers. Es ist leicht zu überprüfen, daß diese Matrix symmetrisch und positiv definit (also auch regulär) ist.

Es ergibt sich die einfache Gleichung

$$L = Du J\omega'$$

für den Drehimpuls, und die Bewegungsgleichung lautet

$$\begin{aligned} M_d &= \dot{L} \\ &= Du J\omega' + Du J\dot{\omega}' \\ &= Du \top Du Du J\omega' + Du J\dot{\omega}' \\ &= Du [\omega', J\omega'] + Du J\dot{\omega}'. \end{aligned}$$

Drückt man noch das Drehmoment in körperfesten Koordinaten aus ($M'_d = \top Du M_d$), so erhält man die *Eulersche Gleichung*

$$M'_d = [\omega', J\omega'] + J\dot{\omega}'.$$

Durch Auflösen nach $\dot{\omega}'$ und mit $\dot{\omega} = Du \dot{\omega}'$ ergibt sich die explizite Differentialgleichung

$$\dot{\omega} = Du J^{-1} (M' - [\omega', J\omega']) \quad (2.10)$$

erster Ordnung für die Winkelgeschwindigkeit. Diese Differentialgleichung zusammen mit der Differentialgleichung

$$Du \dot{\omega} = [\omega, \bullet] Du \quad (2.11)$$

aus (2.8) für Du bestimmen bei gegebenem Moment M und gegebenen Anfangsbedingungen $\omega[0]$ und $Du[0]$ die Drehbewegung Du vollständig.

An dieser Stelle ist zu bemerken, daß $SO(3)$ eine glatte dreidimensionale Untermannigfaltigkeit des Raumes der reellen 3×3 -Matrizen ist (siehe [4]). Ist $\Omega \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{so}(3))$ eine beliebige schiefssymmetrische Matrix, so erfüllen die Lösungen der Differentialgleichung

$$\Phi^\bullet[t] = \Omega[t]\Phi[t] \quad (2.12)$$

die Gleichungskette

$$\begin{aligned} (\top\Phi[t]\Phi[t])^\bullet &= \top\Phi^\bullet[t]\Phi[t] + \top\Phi[t]\Phi^\bullet[t] \\ &= \top\Phi[t]\top\Omega[t]\Phi[t] + \top\Phi[t]\Omega[t]\Phi[t] \\ &= 0. \end{aligned}$$

(mit $\Omega = -\top\Omega$)

Das heißt, das Produkt $\top\Phi[t]\Phi[t]$ bleibt für alle Zeiten konstant. Wählt man als Anfangsbedingung $\Phi[0] \in SO(3)$, ist folglich $\Phi[t]$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ orthogonal. Da die Lösung differenzierbar, also auch stetig ist und Φ nie singular wird, bleibt die positive Determinante erhalten. Also hat man $\Phi[t] \in SO(3)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Damit wird durch die Lösungen der Differentialgleichung (2.12) mit Anfangsbedingungen auf $SO(3)$ ein Fluß auf der Mannigfaltigkeit $SO(3)$ beschrieben. Der sich in lokalen Koordinaten (in [2] werden die Eulerschen Winkel genutzt) als Lösung eines dreidimensionalen Differentialgleichungssystems darstellen läßt.

Für das Differentialgleichungssystem (2.10,2.11) gilt prinzipiell das Gleiche, nur daß durch dieses ein Fluß auf dem Tangentialbündel $T SO(3)$ statt eines Flusses auf $SO(3)$ beschrieben wird. Also kann die Drehbewegung bei gegebenen Kraftgrößen in lokalen Koordinaten durch ein Differentialgleichungssystem sechster Ordnung dargestellt werden.

In [1] wird jedoch für die numerische Behandlung der Drehbewegung ein anderer Weg eingeschlagen. Für zwei Spalten der Matrix Du wird dort die Differentialgleichung (2.11) direkt integriert. Die dritte Spalte von Du ergibt sich dann aus dem Vektorprodukt der zwei durch Integration gewonnenen. Obwohl analytisch die Orthogonalität der Lösungsmatrix abgesichert ist, ergeben sich durch die Diskretisierungsfehler bei der numerischen Integration Abweichungen von der Orthonormalität der Spaltenvektoren. Diese Fehler werden mittels Reorthonormalisierung nach einigen Integrationsschritten wieder ausgeglichen. Zum Abschluß werden noch einmal alle Gleichungen zusammengefaßt, die die Bewegung eines starren Körpers vollständig beschreiben, wenn folgende Größen gegeben sind:

- Masse m des starren Körpers (positive reelle Konstante),
- Trägheitsmoment J des starren Körpers (symmetrische, positiv definite reelle 3×3 -Matrix),
- gesamte auf den starren Körper wirkende Kraft $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$
- gesamtes am starren Körper angreifendes Moment $M \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ bezüglich $0 \in \mathbb{R}^3$,
- die Anfangsbedingungen, die den Bewegungszustand zum Anfangszeitpunkt (hier willkürlich auf Null festgesetzt) festlegen:
 - Anfangsort des Schwerpunktes $u(0)[0] \in \mathbb{R}^3$,
 - Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes $\dot{u}(0)[0] \in \mathbb{R}^3$,
 - Anfangsdrehung des Körpers $Du[0] \in SO(3)$,
 - Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega[0] \in \mathbb{R}^3$.

Die Gleichung für die Schwerpunktsbewegung lautet

$$\ddot{u}(0) = \frac{1}{m}F,$$

und die Drehbewegung ergibt sich aus den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} D\dot{u} &= [\omega, \bullet] Du \\ \dot{\omega} &= Du(M'_d - [\omega', J\omega']), \end{aligned}$$

mit den Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} M'_d &= T Du(M - [u(0), m\dot{u}(0)]) \\ \omega' &= T Du\omega, \end{aligned}$$

(die bei der numerischen Berechnung für jeden Integrationsschritt aus den Zustandsvariablen ermittelt werden).

2.3 Der Balken nach Bernoulli als Tragwerkelement

Balken sind die wichtigsten Tragwerkelemente in Stabtragwerken, die an ihren Anschlüssen Kräfte und Momente aufnehmen können. Deshalb soll hier der physikalische Zusammenhang zwischen der Form eines Balkens und den an seinen Enden auftretenden Kraftgrößen erörtert werden.

Zur Vereinfachung wird die Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese über das Ebenbleiben der Balkenquerschnitte angenommen. Genauer wird hier nicht nur davon ausgegangen, daß die Balkenquerschnitte eben bleiben, sondern sogar davon, daß ihre Form erhalten bleibt. Zum Beispiel in [9] wird nur das Ebenbleiben der Querschnitte explizit gefordert. Für viele Berechnungen wird dann jedoch auch stillschweigend angenommen, daß die Form der Querschnitte erhalten bleibt. In [5] wird auf die Annahme der Erhaltung der Querschnittsgeometrie im Rahmen der Bernoullischen Theorie nocheinmal extra hingewiesen. An der Stelle, an der diese Bernoulli-Hypothese in die Modellierung des Balkens einfließt, wird genauer auf sie eingegangen.

Für Modelle, mit denen auch Querschnittsverformungen bei Balken beschrieben werden können, sei der Leser auf [10] verwiesen.

In Abschnitt 2.1 wurde schon vereinbart, daß in dieser Arbeit bei Tragwerkelementen keine Streckenlasten berücksichtigt werden. Also muß der Balken als masselos angenommen werden. Schwere und Trägheit des Balkens können bei Bedarf näherungsweise durch starre Körper in den Balkenenden modelliert werden.

Ausgangspunkt für die mathematische Beschreibung des Balkens bildet eine Menge $B \subset \mathbb{R}^3$, die sich als Abschluß eines beschränkten (nichtleeren) Gebietes mit stückweise glattem Rand darstellen lassen soll.

Dabei sei mit einem $l > 0$ für jedes $s \in [0, l]$ die Projektion der Fläche

$$A[s] := B \cap (\mathbb{R}^2 \times \{s\})$$

auf die x_1, x_2 -Ebene der Abschluß eines stückweise glatt berandeten Gebietes des \mathbb{R}^2 . Die Fläche $A[s]$ beschreibt die Querschnittsfläche des Balkens an der Stelle s und l steht für die Länge des unverformten Balkens. Dementsprechend soll $\cup_{s \in [0, l]} A[s]$ schon das ganze Gebiet B ergeben. Oft ist es zweckmäßig, statt der Querschnittsfläche $A[s]$ (für $s \in [0, l]$) die in den Ursprung verschobene Querschnittsfläche

$$A'[s] := A[s] - (0, 0, s)$$

zu betrachten.

Die Querschnittsabmessungen eines Balkens sind in der Regel sehr viel kleiner als die Länge der Balkenachse. Deshalb wird der Balken beim ersten Entwurf eines Tragwerkes zunächst nur als Raumkurve berücksichtigt. Jenachdem, ob beim unbelasteten Balken diese Raumkurve gekrümmt ist oder nicht wird der Balken als *gekrümmter Balken* oder als *gerader Balken* modelliert.

Bei einem geraden Balken, soll für jedes $s \in [0, l]$ der Flächenschwerpunkt von $A'[s]$ im Ursprung des \mathbb{R}^3 liegen, das heißt, es soll die Gleichung³

$$\int_{x \in A'[s]} x \, dS = 0$$

³Hier wird die in [7] eingeführte Symbolik für Integrale über Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n benutzt.

gelten. Für den gekrümmten Balken gelte die verallgemeinerte Gleichung

$$\int_{x \in A'[s]} x \mu[s](x) \, dS = 0 \quad \forall s \in [0, l]. \quad (2.13)$$

Dabei ist $\mu[s] : A'[s] \rightarrow \mathbb{R}^+$ für jedes $s \in [0, l]$ eine glatte Wichtungsfunktion. Die exakte Definition der Familie $(\mu[s])_{s \in [0, l]}$ ist erst späterer in diesem Abschnitt möglich. Für den geraden Balken sei $\mu[s]$ für jedes $s \in [0, l]$ konstant Eins. Der Spezialfall des geraden Balkens wird also auch mit von Gleichung (2.13) erfaßt. Bei etwas komplexeren Gleichungen verwirren die geklammerten Argumente „ $[s]$ “. Deshalb werden im folgenden Gleichungen meistens gleich für Familien mit $[0, l]$ als Indexmenge formuliert. Diese sind wie üblich im Sinne der punktweisen Auswertung zu verstehen. Zum Beispiel kann so die Gleichung (oder besser, das unendliche Gleichungssystem) (2.13) in der Form

$$\int_{x \in A'} x \mu(x) \, dS = 0.$$

geschrieben werden.

Zur kontinuumsmechanischen Beschreibung des Balkens im Anschauungsraum wird das Gebiet B durch einen C^∞ -Diffeomorphismus⁴ $P : B \rightarrow P(B)$ in den Modellraum \mathbb{R}^3 des Anschauungsraumes einbettet. Solch ein Diffeomorphismus wird wie in [3] im folgenden *Plazierung* des Balkens genannt. Um zueinander spiegelbildliche Plazierungen des Balkens zu vermeiden, wird verlangt, daß die Funktionaldeterminanten von Plazierungen positiv sind („Einen rechten Handschuh muß man umkrepeln um daraus einen linken Handschuh zu gewinnen. Ein Balken läßt sich nicht durch kleine Deformationen umkrepeln.“).

Die Bernoulli-Hypothese über die Erhaltung der Form der Balkenquerschnitte wird dabei so interpretiert, daß sich für jedes $s \in [0, l]$ die Einschränkung der Plazierung P auf den Querschnitt $A[s]$ mit einer orientierungserhaltenden Isometrie $u[s] \in \mathbf{Lag}$ durch

$$P(x_1, x_2, s) = u[s](x_1, x_2, 0) \quad \forall (x_1, x_2, s) \in A[s] \quad (2.14)$$

beschreiben läßt. Die Isometrie $u[s]$ bildet also die Fläche $A'[s] = A[s] - (0, 0, s)$ auf die Querschnittsfläche $P(A[s])$ ab. Aufgrund der Glattheit von P ist auch die Familie $(u[s])_{s \in [0, l]} \subset \mathbf{Lag}$ glatt parametrisiert⁵. Auf die Menge $C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$ solcher Familien lassen sich die im Abschnitt 2.1 für **Bew** gemachten Aussagen übertragen. Deshalb wird hier die für **Bew** eingeführte Symbolik auch für die Menge $C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$ genutzt. Der Parameter, mit dem der Balken der Länge nach parametrisiert wird, wird meistens mit s (statt mit t) bezeichnet.

⁴Eine Abbildung, die auf einer abgeschlossenen Teilmenge des \mathbb{R}^3 definiert ist, wird dann als C^∞ -Diffeomorphismus bezeichnet, wenn es zu ihr eine Fortsetzung auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^3 gibt, die ein C^∞ -Diffeomorphismus ist.

⁵Im wesentlichen ist die Glattheit von $Du[s]$ bzgl. der Abbildungsnorm nachzuweisen. Dazu reicht es aber schon zu zeigen, daß die ersten beiden Spaltenvektoren $D_1u[s]$ und $D_2u[s]$ beliebig oft nach s differenzierbar sind. Das ist aber wegen

$$\begin{aligned} Du[s](x_1, x_2, 0) &= u[s](x_1, x_2, 0) - u[s](0) \\ &= P(x_1, x_2, s) - P(0, 0, s) \\ &= DP(0, 0, s)(x_1, x_2, 0) \end{aligned}$$

mit $P \in C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$ der Fall. Den dritten Spaltenvektor von Du gewinnt man aus dem (beliebig oft differenzierbaren) äußeren Produkt der ersten zwei.

Wegen $u(0)[s] = P(0, 0, s)$ ($\forall s \in [0, l]$), wird die plazierte Balkenachse $s \in [0, l] \mapsto P(0, 0, s)$ auch durch die Raumkurve $s \in [0, l] \mapsto u(0)[s]$ beschrieben. In Bild 2.2 ist ein plazierter Balken dargestellt.

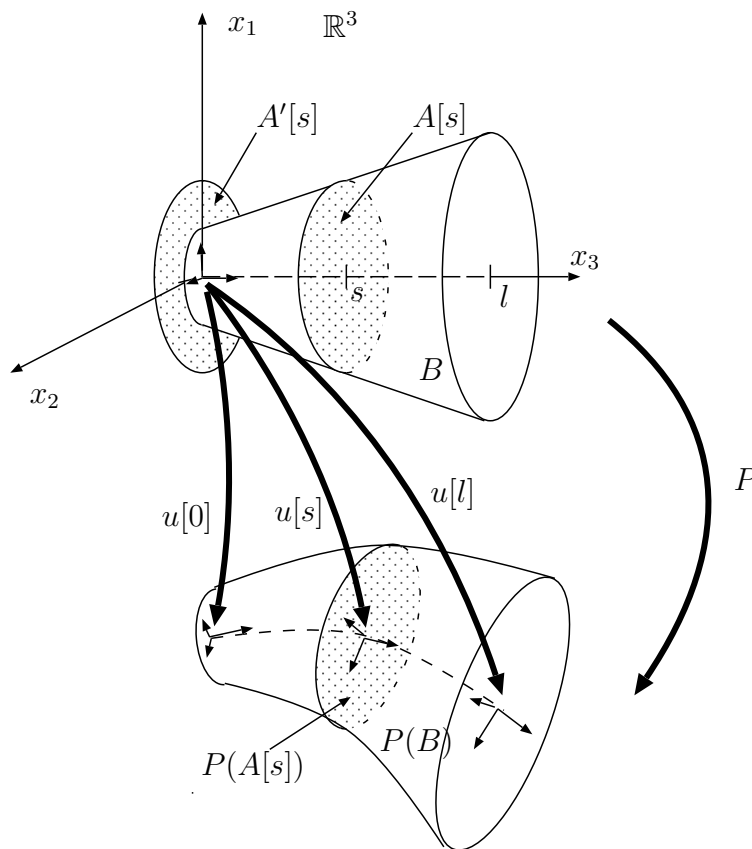


Abbildung 2.2: Die Plazierung P bettet die den Balken beschreibende Menge B (welche hier ein Kegel ist) in den \mathbb{R}^3 ein. Die Einschränkung von P auf die Fläche $A[s]$ ist dabei eine Isometrie und kann durch die Lage $u[s]$ beschrieben werden. Zu beachten ist dabei, daß $u[s]$ die Fläche $A'[s]$ auf $P(A[s])$ abbildet.

Wie aus Gleichung (2.14) zu erkennen ist, wird der Diffeomorphismus P durch u und $(A'[s])_{s \in [0, l]}$ vollständig bestimmt. Weiter unten wird sich zeigen, daß für den Zusammenhang der auf den Balken wirkenden Kraftgrößen mit der Balkenplazierung die Flächen $A'[s]$ ($s \in [0, l]$) als Punktmenge nicht mehr wesentlich sind, sondern nur noch ein gewichtetes Flächenträgheitsmoment von $A'[s]$, welches in einer symmetrischen 3×3 -Matrix zusammengefaßt werden kann, eine Rolle spielt. Somit wird der verformte Balken im wesentlichen durch u beschrieben.

Umgekehrt kann man bei der Beschreibung von kleinen Deformationen, wie sie in der Praxis auftreten, davon ausgehen, daß die dabei auftretenden Familien $(u[s])_{s \in [0, l]} \in C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$ Plazierungen von B in der Form (2.14) beschreiben.

Für die Modellierung des Balkens als Tragwerkelement werden dann letztendlich von der eindimensionalen Mannigfaltigkeit $u \in C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$ nur die Lagen $u_+ := u[0]$ und $u_- := u[l]$ genutzt. Im Abschnitt 2.1 wurden für u_+ und u_- schon die Bezeichnungen positiver und negativer Anschluß eingeführt. Weiterhin wurde in Abschnitt 2.1 schon erläutert, was unter den Kraftgrößen eines Tragwerkelementes zu verstehen ist. Für den Balken als Tragwerkelement werden diese auch *Balkenkraftgrößen*

genannt. Wirkt also mit $F \in \mathbb{R}^3$ von außen die Kraft $-F$ auf den positiven Anschluß des Balkens ein, so ist F die Balkenkraft, und wirkt mit $M \in \mathbb{R}^3$ auf den positiven Anschluß des Balkens das Moment $-M$ bzgl. des Punktes $u_+(0)$, so ist M das Balkenmoment.

Ausgangspunkt zur Ermittlung der Plazierung eines Balkens im Raum bei vorgegebenen Balkenkraftgrößen F und M sind die folgenden Annahmen.

Zunächst eine Wiederholung und Präzisierung von Annahmen, die schon im Abschnitt 2.1 vereinbart wurden.

Keine Kraftgrößenbelege: Es werden keine Kraftgrößenbelege entlang der Tragwerkelemente zugelassen. Das schließt Schwere und Trägheit des Balkens ein. Also wird der Balken, wie schon erwähnt, als masselos angesehen.

Lageninvarianz: Gibt es für zwei Plazierungen P und \tilde{P} eines Balkens eine Lage $u \in \mathbf{Lag}$, so daß

$$\tilde{P} = u \circ P$$

gilt, sagt man, P und \tilde{P} seien *formäquivalent*. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß die so definierte Formäquivalenz wirklich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Plazierungen eines Balkens darstellt. Die Äquivalenzklassen werden auch *Formen* des Balkens genannt (siehe auch [3]). Zu der Lage u , die P in \tilde{P} überführt, wird hier auch *Lageänderung* von \tilde{P} nach P gesagt.

Es sei P eine Plazierung eines Balkens, die unter der Wirkung der Balkenkraftgrößen F und M möglich ist. Es wird angenommen, daß dann mit beliebigem $u \in \mathbf{Lag}$ unter der Wirkung der Balkenkraftgrößen $Du F$ und $Du M$ die Plazierung $u \circ P$ für den Balken möglich ist. Das heißt, die Balkenkraftgrößen sind im wesentlichen nur von der Form des Balkens und nicht von seiner Lage abhängig. „Im wesentlichen“ heißt hier, daß die Richtungen der Balkenkraftgrößen entsprechend der Lageänderung des Balkens korrigiert werden müssen.

Bei der Analyse des Zusammenhangs zwischen Plazierungen eines Balkens und den zugehörigen Balkenkraftgrößen ist aufgrund der Lageninvarianz nur die Form des Balkens wesentlich. Man kann sich also auf geeignete, die Formen des Balkens repräsentierende Plazierungen zurückziehen.

Sei ein Balken der Länge l durch eine Menge B beschrieben und $s \in [0, l]$ beliebig. Ist $P : B \rightarrow P(B)$ eine durch u gemäß (2.14) beschriebene Plazierung für die

$$u[s] = \mathbf{Id}$$

gilt, so heißt diese Plazierung an der Stelle s *standardisiert*. Zu jeder Plazierung $P : B \rightarrow P(B)$ gibt es eine formäquivalente, an der Stelle s standardisierte Plazierung. Denn beschreibt u die Plazierung P gemäß (2.14), so ist

$$P_s := u[s]^{-1} \circ P \tag{2.15}$$

die zu P an der Stelle s standardisierte Plazierung (oder kürzer: die bzgl. s standardisierte Plazierung von P). Es gibt also zu allen Formen des Balkens standardisierte Plazierungen. Haben zwei an der Stelle s standardisierte Plazierungen P_s und \tilde{P}_s die gleiche Form, so sind sie einander gleich. Denn aufgrund der Formäquivalenz ist $\hat{u} := P_s \circ \tilde{P}_s^{-1}$ eine orientierungserhaltende Isometrie und da P_s und \tilde{P}_s an der Stelle s standardisiert sind, ist die Einschränkung von \hat{u} auf $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die Identität des \mathbb{R}^2 . Die einzige orientierungserhaltende Isometrie von \mathbb{R}^3 mit dieser Eigenschaft ist \mathbf{Id} . Damit gilt $P_s = \tilde{P}_s$. Also gibt es zu jeder Form des Balkens genau eine bzgl. s standardisierte Plazierung, und die bzgl. s standardisierten Plazierungen repräsentieren

die Formen des Balkens. Zum Vergleich ist in Bild 2.3 der plazierte Balken aus Bild 2.2 in seiner standardisierten Platzierung dargestellt.

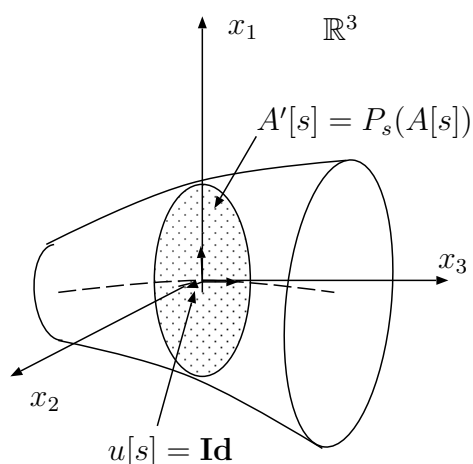


Abbildung 2.3: Der Balken aus Bild 2.2 in seiner bzgl. s standardisierten Platzierung $P_s[s]$ von P .

Schnittprinzip: Es sei $P : B \rightarrow P(B)$ eine unter gegebenen Balkenkraftgrößen $F \in \mathbb{R}^3$ und $M \in \mathbb{R}^3$ mögliche Platzierung eines Balkens.

Das Schnittprinzip hat zum Inhalt, wie sich ein Teil des Balkens verhält, falls man den Balken an der durch ein $s \in (0, l)$ parametrisierten Querschnittsfläche $A[s]$ durchtrennt. Es wird nämlich angenommen, daß für das durch die Menge $B' := B \cap (\mathbb{R}^2 \times [0, s])$ beschriebene Balkenstück die Platzierung $P' := P|_{B'}$ unter der Wirkung der gleichen Balkenkraftgrößen F und M möglich ist.

Im folgenden werden einfache Annahmen über die Eigenschaften des Materials eines Balkens aufgestellt, die zu einer Beziehung zwischen den Balkenkraftgrößen und der Form des Balkens führen.

Beschreibe die Menge B einen Balken der Länge l und sei $s \in (0, l)$ gegeben. Weiter sei $\bar{P}_s : B \rightarrow \bar{P}_s(B)$ eine Platzierung des Balkens, die ohne Kraftgrößeneinwirkung möglich ist. Diese wird im folgenden als Bezugsplatzierung bezeichnet. Da es hier nur um den Zusammenhang zwischen der Form des Balkens und den Balkenkraftgrößen geht, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß \bar{P} bzgl. s standardisiert ist.

Unter der Wirkung von Kraftgrößen F und M auf den Balken sei eine Platzierung $P : B \rightarrow P(B)$ möglich, die ebenfalls bzgl. s standardisiert ist.

Die Bezugsplatzierung lasse sich durch $\bar{u} \in C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$ im Sinne von (2.14) darstellen und P durch $u \in C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$.

Nach dem Schnittprinzip ist für das Balkenstück $B' := B \cap (\mathbb{R}^2 \times [0, s])$ unter der Wirkung der Balkenkraftgrößen F und M die Platzierung $P' := P|_{B'}$ möglich. Nach dem Prinzip „actio=reactio“ müssen dann jedoch an der Schnittfläche $P(A[s]) = A'[s]$ die Kraft

$$F_s[s] = F$$

und das Moment

$$M_s[s] = M + [u(0)[0], -F]$$

bzgl. des Punktes $u(0)[s] = 0$ wirken. Diese Kraftgrößen werden *Schnittgrößen* des Balkens unter der Platzierung P an der Stelle s genannt.

Die Schnittgrößen, die sich auf diese Weise für alle Stellen $s' \in [0, l]$ (mit den dann bzgl. s' standardisierten Plazierungen) ergeben, werden wieder zu Familien $F_s = (F_s[s'])_{s' \in [0, l]}$ und $M_s = (M_s[s'])_{s' \in [0, l]}$ zusammengefaßt.

Darstellbarkeit der Schnittgrößen durch eine Schnittspannung: Beschreibe die Menge B einen Balken der Länge l und sei P eine Plazierung des Balkens, die unter der Wirkung der Balkenkraftgrößen F und M möglich ist. Außerdem sei für den Balken ohne Kraftgrößeneinwirkung die Plazierung \bar{P} möglich.

Es wird angenommen, daß für die Plazierung P sich die Schnittgrößen $F_s[s]$ und $M_s[s]$ an einer Stelle $s \in (0, l)$ mit einer Funktion $\sigma[s] \in C^\infty(A'[s], \mathbb{R}^3)$ durch die Gleichungen

$$F_s[s] = \int_{x \in A'[s]} \sigma[s](x) \, dS, \quad (2.16)$$

$$M_s[s] = \int_{x \in A'[s]} [x, \sigma[s](x)] \, dS \quad (2.17)$$

darstellen lassen. Wesentlich ist dabei die folgende zusätzliche Forderung. Mit den bzgl. s standardisierten Plazierungen P_s von P und \bar{P}_s von \bar{P} sei $\sigma[s](x)$ für alle $x \in A'[s]$ alleine durch die Linearisierung $D(P_s \circ \bar{P}_s^{-1})|_{\bar{P}_s(x_1, x_2, s)}$ von $P_s \circ \bar{P}_s^{-1}$ und durch die Materialeigenschaften im Punkt (x_1, x_2, s) bestimmt. Anschaulich formuliert, bewirkt die Deformation in einem Punkt genau in diesem Punkt eine flächenbezogene Kraft. Das so auf $A'[s]$ definierte Vektorfeld $\sigma[s]$ wird als *Schnittspannung* an der Stelle s des durch P plazierten Balkens bezeichnet.

Lineares und homogenes Materialgesetz: Es wird angenommen, daß für jedes $s \in (0, l)$ und für jedes $x \in A'[s]$ der Zusammenhang zwischen $\sigma[s](x)$ und der *Verzerrungsmatrix*

$$(D(P_s \circ \bar{P}_s^{-1})|_{\bar{P}_s(x_1, x_2, s)} - \mathbf{Id})$$

linear und unabhängig von der Stelle s und dem Punkt $x \in A'[s]$ ist.

Nach der Bernoulli-Hypothese wird die Einschränkung von P_s bzw. \bar{P}_s auf $A[s]$ gerade durch eine Isometrie $u[s]$ (bzw. $\bar{u}[s]$) in der Form (2.14) beschrieben. Für diese gilt wegen der vorausgesetzten standardisierten Lage die Gleichung $\bar{u}[s] = u[s] = \mathbf{Id}$. Daraus folgt $(P_s \circ \bar{P}_s^{-1})|_{A'[s]} = \mathbf{Id}_{A'[s]}$ und man erhält die ersten zwei Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix $D(P_s \circ \bar{P}_s^{-1})|_x$ zu

$$D_1(P_s \circ \bar{P}_s^{-1})|_x = (1, 0, 0) \quad \text{und} \quad D_2(P_s \circ \bar{P}_s^{-1})|_x = (0, 1, 0).$$

Diese können also nicht durch $\sigma[s](x)$ beeinflußt werden, und nur noch der lineare Zusammenhang zwischen $\sigma[s](x)$ und der *Verzerrung* genannten Größe

$$\varepsilon[s](x) := D_3(P_s \circ \bar{P}_s^{-1})|_x - (0, 0, 1)$$

für $x \in A'[s]$ ist von Interesse. Es wird davon ausgegangen, daß dieser durch eine reguläre 3×3 -Matrix L in der Form

$$\sigma[s](x) = L\varepsilon[s](x) \quad (2.18)$$

beschrieben werden kann.

Symmetrie des Materialverhaltens: Für beliebiges $s \in [0, l]$ ist die Einschränkung einer Plazierung auf die Querschnittsfläche $A[s]$ eine Isometrie. Würde man nun vollständige Isotropie des Materialverhaltens verlangen (d. h. das Material würde

längs der Balkenachse das gleiche Verhalten zeigen, wie in den Balkenquerschnitten), dann kämen nur noch orientierungserhaltende Isometrien des \mathbb{R}^3 als Plazierungen infrage. Der Balken wäre also starr.

Um die Elastizität des Balkenmaterials doch berücksichtigen zu können, muß man die Symmetrieforderung an das Materialverhalten etwas abschwächen. Das ist beim Balken auf natürliche Weise möglich, da es für jede Querschnittsfläche mit der Flächennormalen eine bevorzugte Raumrichtung gibt. Das soll anhand eines Gedankenexperiments erörtert werden. Im Rahmen dieses Experiments sei B ein gerader Kreiszylinder der Länge l und die kräftefreie Platzierung \bar{P} sei gegeben durch

$$\bar{P}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 - s) \quad \forall x \in B.$$

Diese Platzierung ist bzgl. der Stelle $s \in (0, l)$ standardisiert. Im Bild 2.4 ist der geschnittene Balken in der Platzierung \bar{P} gepunktet dargestellt

Es sei P eine mögliche bzgl. s standardisierte Platzierung unter der Wirkung von vorgegebenen Schnittgrößen $F_s[s]$ und $M_s[s]$.

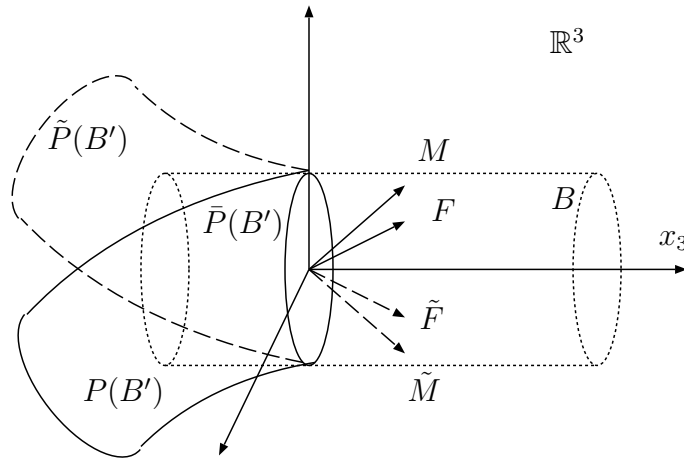


Abbildung 2.4: Veranschaulichung der Symmetrieeigenschaft eines homogenen Balkens aus isotropem Material, der die Form eines geraden Kreiszylinders hat. Die Menge B und das plazierte kraftgrößenfreie Balkenstück $P(B')$ mit $B' := B \cap (\mathbb{R}^2 \times [0, s])$ sind gepunktet dargestellt. Das Balkenstück $P(B')$, mit der Platzierung P , die unter der Wirkung der Kraftgrößen F und M möglich sind, ist mit durchgehenden Linien gezeichnet. Durch eine Drehspiegelung um die x_3 -Achse gehen aus den Kraftgrößen F und M die Kraftgrößen \tilde{F} und \tilde{M} hervor, unter deren Wirkung dann die Platzierung \tilde{P} möglich ist. Das plazierte Balkenstück $\tilde{P}(B')$ ist gestrichelt gezeichnet.

Beim zylinderförmigen homogenen Balken aus isotropen Material erwartet man, daß für jede Drehung und jede Drehspiegelung $Q \in \mathcal{O}(2)$ unter der Wirkung der Schnittgrößen⁶ $\tilde{F}_s[s] := \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_s[s]$ und $\tilde{M}_s[s] := \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_s[s]$ die Platzierung $\tilde{P} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ P \circ \begin{pmatrix} {}^T Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ möglich ist.

Mit der folgenden Diskussion von \tilde{P} soll dem Leser gezeigt werden, daß \tilde{P} wirklich den Erwartungen entspricht, die man an einen homogenen Balken aus isotropen Material stellt.

⁶Die Matrix $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist als Blockmatrix mit dem 2×2 -Block Q , einem 2×1 -Block 0 , einem 1×2 -Block 0 und dem 1×1 -Block (also der Zahl) 1 zu lesen.

Punkte $(x_1, x_2, s) \in A[s] \subset \mathbb{R}^2 \times \{s\}$ werden durch $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wieder in Punkte aus $A[s]$ überführt. Die Einschränkung von der bzgl. s standardisierten Plazierung P auf $A[s]$ ist $(x_1, x_2, s) \in A[s] \mapsto (x_1, x_2, 0)$. Damit gilt

$$\tilde{P}(x_1, x_2, s) = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \top Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = x = P(x_1, x_2, s) \quad \forall x \in A[s].$$

Im Vergleich zu P (und zu \bar{P}) bleiben also bei \tilde{P} die Punkte der Schnittfläche $A[s]$ fest, womit auch \tilde{P} bzgl. s standardisierte Plazierung ist. Die Plazierung \tilde{P} unterscheidet sich also im Falle $Q \neq \mathbf{Id}_{2 \times 2}$ nicht einfach bloß durch eine Lageänderung von dem gemäß P deformierten Balken. Damit beschreibt \tilde{P} wirklich eine andere Deformation des Materials als P .

Der gerade Kreiszyylinder B geht durch die Drehung (bzw. Drehspiegelung) $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ um seine Achse in sich über. Damit entspricht die Menge

$$\tilde{P}(B) = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ P \circ \begin{pmatrix} \top Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (B) = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ P(B)$$

genau der durch $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ um die x_3 -Achse gedrehten (und eventuell gespiegelten) Menge $P(B)$. Die Kraftgrößen unterliegen dabei derselben Drehung (bzw. Drehspiegelung).

Wie oben schon bemerkt, ist diese Symmetrieeigenschaft jedoch streng von der Lageninvarianz zu trennen, da es sich bei \tilde{P} um eine von P verschiedene Deformation handelt.

Es wird nun untersucht, welche Schlußfolgerung aus der Symmetrieeigenschaft für die (das Materialverhalten beschreibende) Matrix L gezogen werden können.

Die Matrix L vermittelt zwischen Verzerrungsgrößen und Schnittgrößen. Für die Verzerrung $\tilde{\varepsilon}[s]$ zur Plazierung \tilde{P} ergibt sich aus der Symmetrieeigenschaft⁷

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}[s](x) &= D_3 \tilde{P}|_{(x_1, x_2, s)} - (0, 0, 1) \\ &= D \left(\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ P \circ \begin{pmatrix} \top Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{(x_1, x_2, s)} \right) \cdot (0, 0, 1) - (0, 0, 1) \\ &= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Id}_{2 \times 2} & \varepsilon_{12} \\ 0 & 1 + \varepsilon_3 \end{pmatrix} \Big|_{\begin{pmatrix} \top Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (x_1, x_2, s)} \cdot \underbrace{(0, 0, 1)}_{= \begin{pmatrix} \top Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (0, 0, 1)} - (0, 0, 1) = \\ &= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \varepsilon[s] \left(\begin{pmatrix} \top Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

⁷Wird eine Matrix $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$ partitioniert, so werden die Blöcke durch zusammenschreiben der Indizes kenntlich gemacht. Nach diesem Schema ergibt sich zum Beispiel $m_{12,3} = \begin{pmatrix} m_{1,3} \\ m_{2,3} \end{pmatrix} = (m_{1,3}, m_{2,3})$. Genauso wird mit Vektoren verfahren. Dabei kann der Index 12 nicht mit der Zahl 12 verwechselt werden, da in diesem Abschnitt höchstens 3×3 -Matrizen vorkommen.

Der Zusammenhang zwischen Schnittkraft $\tilde{F}_s[s]$ und Verzerrung $\tilde{\varepsilon}[s]$ ist damit

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_s[s] &\stackrel{(2.16)}{=} \int_{x \in A'[s]} \tilde{\sigma}[s](x) \, dS \\
 &\stackrel{(2.18)}{=} L \int_{x \in A'[s]} \tilde{\varepsilon}[s](x) \, dS \\
 &\stackrel{(2.19)}{=} L \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_{x \in A'[s]} \varepsilon[s] \left(\begin{pmatrix} \top Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right) \, dS \\
 &= L \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_{x' \in A'[s]} \varepsilon[s](x') \, dS
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung erhält man aus der Transformation $x' = \begin{pmatrix} \top Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$, wenn man beachtet, daß für die Kreisflächen $A[s]$ ($s \in [0, l]$) die Gleichung $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A[s] = A[s]$ gilt und der bei der Integraltransformation auftretende Faktor $|\det(\top Q)|$ gleich Eins ist.

Mit $\tilde{F}_s[s] = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_s[s]$ und $\int_{x \in A'[s]} \varepsilon(x) \, dx = L^{-1} F_s[s]$ resultiert daraus die Gleichung

$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_s[s] = L \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L^{-1} F_s[s].$$

Diese Gleichung soll für alle Werte von $F_s[s] \in \mathbb{R}^3$ gelten. Somit erhält man als Symmetriebedingung für L die Variationsgleichung⁸

$$\begin{aligned}
 \forall Q \in \mathcal{O}(2) : \quad \begin{pmatrix} L_{12,12} & L_{12,3} \\ L_{3,12} & L_{3,3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \top Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{12,12} & L_{12,3} \\ L_{3,12} & L_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \top Q L_{12,12} Q & \top Q L_{12,3} \\ L_{3,12} Q & L_{3,3} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Für $L_{3,3}$ ergibt sich keine einschränkende Bedingung. Diese Zahl ist eine Materialkonstante, die üblicherweise mit E bezeichnet wird und *Elastizitätsmodul* heißt.

Der Nullpunkt ist der einzige Punkt des \mathbb{R}^2 , der bei allen Drehungen der Ebene um den Nullpunkt in sich übergeht. Deshalb folgt aus $\top Q L_{12,3} = L_{12,3}$ ($\forall \top Q \in \mathcal{O}(2)$) daß $L_{12,3}$ gleich Null ist. Entsprechendes gilt für $L_{3,12}$.

Bleibt die Variationsgleichung

$$L_{12,12} = \top Q L_{12,12} Q \quad \forall Q \in \mathcal{O}(2) \tag{2.20}$$

zu diskutieren.

Zu den orthogonalen Matrizen gehören auch die Permutationsmatrizen, die durch Vertauschung zweier Spaltenvektoren aus der Einheitsmatrix \mathbf{Id} hervorgehen. (Von den orthogonalen linearen Abbildungen des \mathbb{R}^2 hat nur die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ diese Eigenschaft.) Ist Q eine solche Matrix, so sind bei der Matrix $\top Q L_{12,12} Q$ im Vergleich zu $L_{12,12}$ zwei symmetrisch zur Hauptdiagonale liegende Matrixelemente miteinander vertauscht. (Bei der 2×2 -Matrix $L_{12,12}$ sind das genau die Elemente $L_{1,2}$ und $L_{2,1}$.) Somit folgt aus (2.20) die Symmetrie von $L_{12,12}$.

⁸Ein durch eine unendliche Menge parametrisiertes Gleichungssystem heißt Variationsgleichung.

Zu der symmetrischen Matrix $L_{12,12}$ gibt es eine Drehmatrix $Q' \in SO(2)$, so daß $D := \mathsf{T}Q'L_{12,12}Q'$ eine Diagonalmatrix ist. Man verifiziert leicht, daß für D aus der Gleichung (2.20) die Variationsgleichung

$$D = \mathsf{T}QDQ \quad \forall Q \in \mathcal{O}(2) \quad (2.21)$$

folgt. Im Vergleich zu D sind mit $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Diagonalelemente von $\mathsf{T}QDQ$ miteinander vertauscht. Es bleibt also wegen (2.21) nur die Möglichkeit $D = G\mathbf{Id}_{2 \times 2}$ mit einer reellen Zahl G , womit sich

$$L_{12,12} = Q'D\mathsf{T}Q' = G\mathsf{T}Q'Q' = G\mathbf{Id}_{2 \times 2}$$

ergibt. Da die Regularität von L vorausgesetzt wird, muß G von Null verschieden sein. Die Zahl G ist wie E eine Materialkonstante und heißt Schubmodul des Materials.

Zusammenfassend gesagt, schränkt also die Symmetriebedingung die Menge der 3×3 -Matrizen, die das Materialverhalten beschreiben können, auf Matrizen der Form

$$L = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

mit zwei von Null verschiedenen Zahlen E und G ein. Die Elastizitätskonstante E und der Schubmodul G müssen für das jeweilige Material experimentell ermittelt werden.

Aus den eben zusammengestellten Annahmen läßt sich nun eine Beziehung zwischen den Kraftgrößen eines Balkens und seinen möglichen Plazierungen ableiten.

Durch eine Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei ein Balken der Länge l beschrieben, der eine kraftgrößenfreie Platzierung $\bar{P} : B \rightarrow \bar{P}(B)$ hat.

Unter der Wirkung der Balkenkraftgrößen F und M sei die Platzierung $P : B \rightarrow P(B)$ möglich. Durch $\bar{u}, u \in C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$ seien P und \bar{P} in der Form (2.14) beschrieben. Bisher wurde nur ein Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verzerrung für den an einer Stelle $s \in (0, l)$ geschnittenen Balken in der bzgl. s standardisierten Lage behandelt. Der hier gegebene Fall läßt sich jedoch auf den schon behandelten zurückführen. Für jedes $s \in (0, l)$ sind

$$\bar{P}_s := \bar{u}[s]^{-1} \circ \bar{P} \quad \text{und} \quad P_s = u[s]^{-1} \circ P$$

bzgl. s standardisierte Platzierungen. Nach dem Prinzip der Lageninvarianz ist \bar{P}_s eine mögliche kraftgrößenfreie Platzierung, und die Platzierung P_s ist unter der Wirkung der Schnittgrößen

$$\begin{aligned} F_s[s] &= Du[s]^{-1}F \quad \text{und} \\ M_s[s] &= Du[s]^{-1}(M + [u(0)[s] - u(0)[0], F]) \end{aligned} \quad (2.22)$$

möglich. Bei der Herleitung der Gleichung (2.22) für das Schnittmoment ist dabei außer dem Prinzip der Lageninvarianz auch noch das Varignonsche Momentenprinzip anzuwenden, um das bzgl. des positiven Anschlusses gegebene Moment des Balkens in das Moment bzgl. des Punktes $u(0)[s]$ auf der Schnittfläche umzurechnen.

Zur Ermittlung der Verzerrung

$$\begin{aligned}\varepsilon[s](x) &= D_3(P_s \circ \bar{P}_s^{-1})|_x - (0, 0, 1) \\ &= (DP_s|_{(x_1, x_2, s)} D\bar{P}_s^{-1}|_x - \mathbf{Id})(0, 0, 1)\end{aligned}$$

für die Punkte x in der Schnittfläche $A'[s]$ wird zuerst DP_s untersucht. Die ersten zwei Spaltenvektoren sind $D_1P_s = (1, 0, 0)$ und $D_2P_s = (0, 1, 0)$, da es sich bei P_s um eine bzgl. s standardisierte Plazierung handelt. Von Interesse ist $D_3P_s|_{(x_1, x_2, s)}$ für $x \in A'[s]$. Die Plazierung $P : B \rightarrow P(B)$ wurde durch die Lage $u[s] : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in die standardisierte Lage P_s mit

$$P_s(x_1, x_2, s') = (u[s]^{-1} \circ P)(x_1, x_2, s') \quad \forall (x_1, x_2, s') \in B$$

gebracht. Beachtet man weiter die Darstellung

$$P(x_1, x_2, s') = u[s'](x) = u(0)[s'] + Du[s']x,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}D_3P_s|_{(x_1, x_2, s)} &= \frac{d}{ds'} (u^{-1}[s](u(0)[s'] + Du[s']x))|_{s'=s} \\ &= Du[s]^{-1}(\dot{u}(0)[s] + D\dot{u}[s]x) \\ &= \mathbb{T} Du[s]\dot{u}(0)[s] + \mathbb{T} Du[s]D\dot{u}[s]x.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Wie bei der Starrkörperbewegung läßt sich die antisymmetrische Abbildung $x \mapsto \mathbb{T} Du[s]D\dot{u}[s]x$ mit einem Vektor $\omega'[s] \in \mathbb{R}^3$ durch das alternierende Produkt $x \mapsto [\omega'[s], x]$ darstellen. Der Vektor $\omega'[s]$ wird dabei aus folgendem Grunde gestrichen. Man kann sich vorstellen, daß $u \in C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$ einen Zeitausschnitt aus einer Starrkörperbewegung beschreibt. Dabei entspricht der Längenparameter des unbelasteten Balkens bei der Bewegung der Zeit. Für Starrkörperbewegungen ist in Abschnitt 2.2 die Winkelgeschwindigkeit als derjenige Vektor⁹ ω erklärt, für den $D\dot{u}\mathbb{T} Du x = [\omega, x]$ ($\forall x \in \mathbb{R}^3$) gilt. Der Vektor $\omega'[s] = \mathbb{T} Du[s]\omega[s]$ ist dann gerade die Koordinatendarstellung von $\omega[s]$ bzgl. des körperfesten Bezugssystems des starren Körpers, und für ω' gilt $\mathbb{T} Du D\dot{u} x = [\omega', x]$ ($\forall x \in \mathbb{R}^3$) (vgl. auch Gleichung (2.9)).

Beim geraden Balken gilt für die im unbelasteten Fall mögliche, an der Stelle s standardisierten Plazierung $\mathbb{T} Du[s]\dot{u}(0)[s] = (0, 0, 1)$. Deshalb sei die Differenz

$$\xi[s] := \mathbb{T} Du[s]\dot{u}(0)[s] - (0, 0, 1)$$

hier als *Verzerrung der neutralen Faser* bezeichnet.

Man kann wie folgt den soeben definierten Verzerrungsgrößen Deformationen des geraden Balkens zuordnen. Der längenbezogene Winkel ω'_3 steht für eine Torsion, $(\omega'_1, \omega'_2, 0)$ für eine Biegung, ξ_3 für eine Dehnung und $(\xi_1, \xi_2, 0)$ für eine Schubverzerrung.

Mit diesen Größen erhält man aus (2.23) für $s \in [0, l]$ und $x = (x_1, x_2, 0) \in A'[s]$ die Jacobi-Matrix der an der Stelle s standardisierten Plazierung P_s zu

$$DP_s = \mathbf{Id} + (\xi[s] + [\omega'[s], x])\mathbb{T}(0, 0, 1).$$

⁹Genauer ist das eine vektorwertige Zeitfunktion.

Zur Beschreibung der kraftgrößenfreien Bezugslage des Balkens durch die Bezugspazierung \bar{P} benötigt man nur die Biegung. Alle anderen Verzerrungsgrößen kann man durch eine geeignete Wahl von B und \bar{P} vermeiden. Es wird also davon ausgegangen, daß die Größen $\bar{\xi}$ und $\bar{\omega}'_3$ gleich Null sind. Da mit $\bar{\omega}'_3 = 0$ der Vektor $\bar{\omega}'[s]$ wie x in der x_1, x_2 -Ebene liegt, ist $[\bar{\omega}', x]_3$ die einzige Komponente von $[\bar{\omega}', x]$, die verschieden von Null sein kann. Für die kraftgrößenfreie Bezugslage bekommt $D\bar{P}_s$ die besonders einfache Form

$$D\bar{P}_s|_{(x_1, x_2, s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + [\bar{\omega}'[s], x]_3 \end{pmatrix}$$

und läßt sich leicht invertieren

$$D\bar{P}_s^{-1}|_x = D\bar{P}_s|_{(x_1, x_2, s)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + [\bar{\omega}'[s], x]_3} \end{pmatrix}.$$

Damit werden zur Berechnung der Deformation ε des Balkens nur noch Größen benötigt, die sich aus den eindimensionalen Mannigfaltigkeiten u und \bar{u} ergeben

$$\begin{aligned} \varepsilon[s](x) &= DP_s|_{(x_1, x_2, s)} D_3 \bar{P}_s^{-1}|_x - (0, 0, 1) \\ \varepsilon(x) &= \frac{1}{1 + [\bar{\omega}', x]_3} \left((0, 0, 1) + \xi + [\omega', x] \right) - (0, 0, 1) \\ &\stackrel{\text{Hauptnenner bilden}}{=} \frac{1}{1 + [\bar{\omega}', x]_3} \left(\xi + [\omega', x] - \underbrace{(0, 0, [\bar{\omega}', x]_3)}_{=[\bar{\omega}', x]} \right) \\ &= \frac{1}{1 + [\bar{\omega}', x]_3} \left(\xi + [\omega' - \bar{\omega}', x] \right). \end{aligned}$$

Über das Materialgesetz läßt sich die Verbindung von den die Balkengeometrie beschreibenden Größen u und \bar{u} zu den Schnittgrößen $F_s[s]$ und $M_s[s]$ herstellen. Zunächst erhält man mit (2.18) und (2.16) für die Schnittkraft die Gleichung

$$F_s = L \int_{x \in A'} (\xi + [\omega' - \bar{\omega}', x]) \frac{dS}{1 + [\bar{\omega}', x]_3}, \quad (2.24)$$

Rechnet man in der, sich aus (2.18) und (2.17) ergebenden Gleichung für das Schnittmoment

$$M_s = \int_{x \in A'} [x, L\varepsilon] dS$$

das Vektorprodukt aus, so erhält man

$$\begin{aligned} [x, L\varepsilon] &= (x_2 E \varepsilon_3, -x_1 E \varepsilon_3, x_1 G \varepsilon_2 - x_2 G \varepsilon_1) \\ &= L' [x, \varepsilon] \end{aligned}$$

mit der Matrix

$$L' := \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix},$$

bei der gegenüber L die Plätze der Einträge E und G vertauscht sind. Damit lautet die Gleichung für das Schnittmoment

$$M_s = L' \int_{x \in A'} [x, \xi + [\omega' - \bar{\omega}', x]] \frac{dS}{1 + [\bar{\omega}', x]_3}. \quad (2.25)$$

Beim Aufstellen der Bedingungen für das den Balken beschreibende Gebiet B wurde in Gleichung (2.13) eine Wichtungsfunktion $\mu[s]$ eingeführt, von der bisher nur gesagt wurde, daß sie für den im unbelasteten Fall geraden Balken identisch Eins ist. Hier wird nun festgelegt, daß $\mu(x) = \frac{1}{1 + [\bar{\omega}', x]_3}$ gelten soll. Für hinreichend schwache Krümmung des unbelasteten Balkens gilt, wie oben gefordert wurde, die Ungleichung $\mu(x) > 0$ ($\forall x \in A'$).

In Punkten $s \in [0, l]$, in denen der unbelastete Balken nicht gekrümmt ist, ist wegen $\bar{\omega}'[s] = 0$ die Wichtungsfunktion gleich Eins. Die Wichtungsfunktion ist nur von der Form des unbelasteten Balkens abhängig und nicht vom Belastungszustand und der Lage des Balkens. Deshalb kann man sie für einen gegebenen Balken als bekannt voraussetzen. Aufgrund der speziellen Wahl von μ und mit der Forderung (2.13), läßt sich aus den Gleichungen (2.24) und (2.25) ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zur Beschreibung von u herleiten.

Der Vektor ω' , der sich aus $D\dot{u}$ ergibt, entfällt in der Gleichung für die Schnittkraft

$$F_s = L\xi \int_{x \in A'} \mu(x) dS + L \left[\omega' - \bar{\omega}', \underbrace{\int_{x \in A'} x\mu(x) dS}_{=0} \right] \quad (2.26)$$

und die Verzerrungsgröße ξ , die sich aus $\dot{u}(0)$ ergibt, entfällt in der Gleichung für das Schnittmoment

$$M_s = L' \left[\underbrace{\int_{x \in A'} x\mu(x) dS}_{=0}, \xi \right] + L' \int_{x \in A'} [x, [\omega' - \bar{\omega}', x]] \mu dS. \quad (2.27)$$

Die für jedes $s \in [0, l]$ positive Zahl

$$\alpha[s] := \int_{x \in A'[s]} \mu[s](x) dS$$

wird hier *gewichteter Flächeninhalt* an der Stelle s genannt. An Stellen $s \in [0, l]$ an welchen der Balken nicht gekrümmt ist ($\mu[s](x) = 1$), ist der gewichtete Flächeninhalt gerade gleich dem Flächeninhalt von $A'[s]$. Setzt man nun die Größen α , $\xi = (\mathbb{T} Du\dot{u}(0) - (0, 0, 1))$ und $F_s = \mathbb{T} DuF$ in die Gleichung (2.26) für die Schnittkraft ein, so erhält man die Gleichung

$$\mathbb{T} DuF = \alpha L (\mathbb{T} Du\dot{u}(0) - (0, 0, 1)),$$

die aufgelöst nach $\dot{u}(0)$ die explizite Differentialgleichung

$$\dot{u}(0) = \frac{1}{\alpha} (Du L'^{-1} \mathbb{T} Du)F + D_3 u \quad (2.28)$$

für die Kurve $u(0)$ ergibt.

Zur Auflösung der Gleichung (2.27) nach ω' nutzt man analog zur Vorgehensweise bei der Drehbewegung des starren Körpers die Gleichung

$$[x, [\omega' - \bar{\omega}', x]] = (\mathbf{Id} \mathbb{T} x x - x \mathbb{T} x)(\omega' - \bar{\omega}') \quad (2.29)$$

und definiert das gewichtete Flächenträgheitsmoment

$$I[s] := \int_{x \in A'[s]} (\mathbf{Id} \mathbb{T} x x - x \mathbb{T} x) \mu[s](x) \, dS.$$

Die Matrizen $I[s]$ sind für alle $s \in [0, l]$ positiv definit und damit auch invertierbar (außerdem sind sie symmetrisch). Sie werden zur Familie $(I[s])_{s \in [0, l]}$ zusammengefaßt.

Für Stellen $s \in [0, l]$ an denen der unbelastete Balken nicht gekrümmt ist, ist $I[s]$ gleich dem gewöhnlichen Flächenträgheitsmoment.

Unter Beachtung von (2.29) erhält man aus (2.27) die Gleichung

$$M_s = L' I(\omega' - \bar{\omega}')$$

bzw. aufgelöst nach ω' die Gleichung

$$\omega' = \bar{\omega}' + L'^{-1} I^{-1} M_s. \quad (2.30)$$

Zur Ermittlung der Matrix Du kann wie beim Starrkörper die Differentialgleichung

$$D_k \dot{u} = D\dot{u} \mathbb{T} Du D_k u = [\omega, D_k u] \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.31)$$

mit dem durch $[\omega, x] = D\dot{u} \mathbb{T} Dux$ ($\forall x \in \mathbb{R}^3$) definierten Vektor ω genutzt werden. Wie schon erwähnt entspricht hier der Vektor ω der längenbezogenen Winkeländerung in Raumkoordinaten und kann durch $\omega = Du \omega'$ aus dem Vektor ω' ermittelt werden (vgl. auch Abschnitt 2.2).

Beachtet man noch, wie sich das Schnittmoment aus dem Moment des Balkens (siehe Gleichung (2.22)) ergibt, so erhält man aus (2.30) für ω die Gleichung

$$\omega = Du \left(\bar{\omega}' + L'^{-1} I^{-1} \mathbb{T} Du (M + [u(0) - u(0)[0], F]) \right). \quad (2.32)$$

Die Gleichungen (2.28, 2.31, 2.32) ergeben zusammen ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für $u(0)$ und Du .

Bei gegebenen Kraftgrößen F und M des Balkens und gegebener Anfangsbedingung $u[0]$ kann somit durch Integration $u[l]$ ermittelt werden. Durch dieses Differentialgleichungssystem wird die Relation zwischen den Kraftgrößen des Balkens und der Lage $u_+ = u[0]$; $u_- = u[l]$ des Balkens beschrieben.

Bei der Herleitung des Differentialgleichungssystems wurde das Prinzip der Lageninvarianz genutzt. Dieses überträgt sich auch wirklich auf die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems. Das kann man sich leicht klarmachen, indem man sich eine beliebige Lage $\tilde{u} \in \mathbf{Lag}$ und eine Lösung $u \in C^\infty([0, l], \mathbf{Lag})$ zu den Kraftgrößen F und M vorgibt und zeigt, daß dann $s \in [0, l] \mapsto \tilde{u} \circ u[s]$ eine Lösung unter den Kraftgrößen $D\tilde{u}F$ und $D\tilde{u}M$ ist.

An dieser Stelle soll kurz auf die bisher in diesem Abschnitt ausgesparte zeitliche Abhängigkeit der Bewegung $(u_+, u_-) \in \mathbf{Bew}$ eines Balkens im Raum eingegangen werden. Sind $F, M \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ die zeitlich abhängigen Kraftgrößen des Balkens,

so ergebe sich $u_-[t]$ zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ aus der Integration des obigen Differentialgleichungssystems unter Verwendung der momentanen Kraftgrößen $F[t]$ und $M[t]$. (Man beachte, daß t hier die Zeit bezeichnet – im Unterschied zum Parameter $s \in [0, l]$, der den Balken der Länge nach parametrisiert.) Als dynamisches System ist das hier behandelte Balkenmodell also gedächtnislos. Damit ist dieses Modell aus der Sicht der Netzwerktheorie als **resistives** Tragwerkelement zu bezeichnen.

2.4 Weitere Tragwerkelemente

Hier werden einige weitere Tragwerkelemente zusammen mit den zugehörigen Relationen zwischen Bewegungs- und Kraftgrößen angegeben.

Gelenk: Durch Gelenke kann man zum Beispiel Balken drehbar miteinander verbinden. Von den konstruktiven Abmessungen eines Gelenks wird abstrahiert. Zwischen den Bewegungen $(u_+, u_-) \in \mathbf{Bew}^2$ der Anschlüsse und den Kraftgrößen $F, M \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ des Gelenks besteht die Relation

$$\begin{aligned} M &= 0; & F &\in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \text{ beliebig;} \\ u_+(0) &= u_-(0); & Du_+, Du_- &\in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{Lag}) \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

Das Gelenk ist wie der Balken bewegungsinvariant, denn für ein beliebiges $\tilde{u} \in \mathbf{Bew}$ gelten die Implikationen

$$\begin{aligned} u_+(0) = u_-(0) &\Rightarrow \tilde{u} \circ u_+(0) = \tilde{u} \circ u_-(0) \text{ und} \\ M = 0 &\Rightarrow D\tilde{u}M = 0. \end{aligned}$$

Außerdem ist das Gelenk gedächtnislos.

Zugfeder: Eine an ihren Enden drehbar gelagerte Zugfeder kann mit einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch die Gleichung

$$F = f(\|u_-(0) - u_+(0)\|) \frac{u_-(0) - u_+(0)}{\|u_-(0) - u_+(0)\|} \quad (2.33)$$

und die Bedingungen $M = 0$ beschrieben werden. Dabei werden nur solche Bewegungen $(u_+, u_-) \in \mathbf{Bew}^2$ der Feder zugelassen, für die $u_+(0)[t] \neq u_-(0)[t] (\forall t \in \mathbb{R})$ gilt. Ein so definiertes Tragwerkelement ist bewegungsinvariant. Denn ersetzt man in der rechten Seite der Gleichung (2.33) die Bewegungen u_+ und u_- durch $\tilde{u}u_+$ und $\tilde{u}u_-$ mit einem beliebigen $\tilde{u} \in \mathbf{Bew}$, so erhält man die Gleichungskette

$$\begin{aligned} f(\|\tilde{u}u_-(0) - \tilde{u}u_+(0)\|) \frac{\tilde{u}u_-(0) - \tilde{u}u_+(0)}{\|\tilde{u}u_-(0) - \tilde{u}u_+(0)\|} &= \\ &= f(\|D\tilde{u}(u_-(0) - u_+(0))\|) \frac{D\tilde{u}(u_-(0) - u_+(0))}{\|D\tilde{u}(u_-(0) - u_+(0))\|} \\ &= f(\|u_-(0) - u_+(0)\|) \frac{D\tilde{u}(u_-(0) - u_+(0))}{\|u_-(0) - u_+(0)\|} \\ \text{D}\tilde{u} \text{ ist zu jedem} & \\ \text{Zeitpunkt Isometrie} & \\ &= D\tilde{u}F. \end{aligned}$$

Eine Verallgemeinerung der Zugfeder: Die Relation der Zugfeder läßt sich verallgemeinern, wenn man in Gleichung (2.33) statt einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ einen Operator f wählt, der reelle Zeitfunktionen in reelle Zeitfunktionen (also $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ in sich) abbildet. Der Beweis für die Bewegungsinvarianz des so definierten Tragwerkelements bleibt dann gültig.

Reibung: Zum Beispiel kann man sich zur Verallgemeinerung der Zugfeder den Operator f durch

$$f(\chi) := g(\dot{\chi}) \quad \forall \chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

mit einer Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vorgeben. (Dabei steht $\dot{\chi}$ wieder für die zeitliche Ableitung von χ .) So kann man eine gerade geführte und drehbar gelagerte geschwindigkeitsabhängige Dämpfung, also eine spezielle Art von Reibung, modellieren.

2.5 Modellierung von Stabtragwerken

In diesem Abschnitt werden zwei Möglichkeiten zur Modellierung von Stabtragwerken vorgestellt. Die eine wird im weiteren als physikalische Modellierung bezeichnet und die andere als netzwerkähnliche Modellierung.

Die physikalische Modellierung von Stabtragwerken baut direkt auf den in den vorhergehenden Abschnitten dargelegten, physikalischen Grundlagen auf.

Aus der physikalischen Modellierung wird dann die netzwerkähnliche Modellierung entwickelt. Bei der netzwerkähnlichen Modellierung werden die geometrischen Restriktionen, die sich aus der Verbindung von Tragwerkelementen ergeben, durch das verallgemeinerte Kirchhoffsche Spannungsgesetz beschrieben und die Kraftgrößengleichgewichte durch das modifizierte Kirchhoffsche Stromgesetz.

Bei der Modellierung eines Tragwerkes kann man analog zur Modellierung einer elektronischen Schaltung durch ein Netzwerk vorgehen. Deshalb werden bei der Tragwerkmodellierung auch ähnliche Strukturen wie in der Netzwerktheorie genutzt.

2.5.1 Physikalische Modellierung von Stabtragwerken

Abschnitt 2.1 motiviert, daß zur Beschreibung der Bewegung von Tragwerkelementen im Anschauungsraum Paare von Elementen aus **Bew** geeignet sind. Dementsprechend wird hier die Menge

$$\mathcal{U}_P := \mathbf{Bew}^2$$

als *P-Spannungsraum* eingeführt. Der als Index und Prefix stehende Buchstabe P besagt dabei, daß es sich um Größen im Zusammenhang mit der physikalischen Modellierung von Stabtragwerken handelt. Er wird auch weggelassen, solange keine Verwechslungsgefahr besteht. Die Elemente von \mathcal{U}_P heißen *P-Spannungen*.

Zur Modellierung der in den Tragwerkelementen von Stabtragwerken wirkenden Kraftgrößen wird der *P-Stromraum*

$$\mathcal{J}_P := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$$

eingeführt, dessen Elemente *P-Ströme* heißen.

Jedem P-Strom $i \in \mathcal{I}_P$ werden zwei Zeitfunktionen zugeordnet, die *P-Kraft* $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ und das *P-Moment* $M \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\forall t \in \mathbb{R} : (F(t), M(t)) = i(t).$$

Bei der Modellierung eines Stabtragwerkes werden die Tragwerkelemente mit den Elementen einer endlichen Menge identifiziert. Um Bewegungen und Kraftgrößen der Tragwerkelemente dieses Stabtragwerkes beschreiben zu können, werden (in Anlehnung an die Netzwerktheorie) die folgenden Begriffe eingeführt.

Sei \mathcal{Z} eine endliche Menge. Familien $u \in \mathcal{U}_P^{\mathcal{Z}}$ und $i \in \mathcal{I}_P^{\mathcal{Z}}$ heißen *P-Spannungsbelegungen* bzw. *P-Strombelegungen* von \mathcal{Z} , die Paare (u, i) solcher Familien heißen *P-Signale* auf \mathcal{Z} und die Menge

$$\mathcal{S}_P := \mathcal{U}_P^{\mathcal{Z}} \times \mathcal{I}_P^{\mathcal{Z}}$$

aller solcher Paare heißt *P-Grundsignalmenge* auf \mathcal{Z} .

Ein Tripel $(\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$ eines Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$, einer Teilmenge \mathcal{V}_P der P-Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} und einer Teilmenge \mathcal{Z}_T der Zweigmengen von \mathcal{G} heißt *physikalisches Stabtragwerkmodell* oder kurz *P-Tragwerk*, wenn für alle Signale $(u, i) \in \mathcal{V}_P$ die Bedingung

$$\forall b \in \mathcal{Z}_T : u_{b+} = \mathbf{Id},$$

erfüllt ist und alle Zweige aus \mathcal{Z}_T den gleichen Startknoten haben. Die Menge \mathcal{V}_P heißt *P-Verhaltensrelation* des Tragwerkes und \mathcal{Z}_T heißt *Trägheitszweigmengen*. Die Elemente aus \mathcal{Z}_T werden *Trägheitszweige* genannt.

Die Inzidenzrelation \mathcal{A} des Graphen gibt die Verbindungsstruktur des Tragwerkes wieder. Gilt zum Beispiel für $b, \bar{b} \in \mathcal{Z}$ die Gleichung $\mathcal{A}_+(b) = \mathcal{A}_-(\bar{b})$, so heißt das, daß der positive Anschluß des durch b modellierten Tragwerkelementes mit dem negativen Anschluß des durch \bar{b} modellierten Tragwerkelementes mechanisch fest verbunden ist.

Die P-Verhaltensrelation \mathcal{V}_P beschreibt die für die Strukturmechanik wesentlichen Eigenschaften der Tragwerkelemente, aus denen das Tragwerk besteht.

Im Abschnitt 2.4 wurden bereits für einzelne Tragwerkelemente Verhaltensrelationen eingeführt. Die P-Verhaltensrelation eines Stabtragwerkes entspricht bei der naheliegenden Identifikation von Paaren aus $\mathcal{U}_P^{\mathcal{Z}} \times \mathcal{I}_P^{\mathcal{Z}}$ mit Elementen aus $(\mathcal{U}_P \times \mathcal{I}_P)^{\mathcal{Z}}$ dem kartesischen Produkt der Verhaltensrelationen aller Tragwerkelemente, aus denen es besteht.

In der Trägheitszweigmengen \mathcal{Z}_T sind alle diejenigen Zweige enthalten, die Trägheiten des Tragwerkes modellieren. Die zum positiven Anschluß einer Trägheit gehörige Bewegung u_{b+} steht für das Inertialsystem, auf das sich die Bewegung der Trägheit bezieht. Hier wird das zur konstanten Bewegung \mathbf{Id} gehörige Bezugssystem als Inertialsystem für alle Trägheiten des zu modellierenden Tragwerkes herangezogen.

Dementsprechend gilt für alle Signale (u, i) aus der Verhaltensrelation eines P-Tragwerkes $u_{b+} = \mathbf{Id}$ ($\forall b \in \mathcal{Z}_T$) und alle Zweige aus \mathcal{Z}_T haben den gleichen Startknoten. Dieser Knoten wird im folgenden als *Inertialknoten* des P-Tragwerkes bezeichnet.

Nicht immer ist es sinnvoll, bei der Modellierung eines Tragwerkes die Trägheiten zu berücksichtigen. So kann es vorkommen, daß bei einem P-Tragwerk die Trägheitszweigmengen leer ist. In diesem Fall hat das P-Tragwerk auch keinen Inertialknoten.

Anschlüsse von Tragwerkelementen eines Stabtragwerkes, die mechanisch fest miteinander verbunden sind, führen die selben Bewegungen aus. Diese sich aus der Verbindungsstruktur des Tragwerkes ergebenden, geometrischen Restriktionen werden durch das folgende Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke modelliert.

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph und $u \in \mathcal{U}_P^{\mathcal{Z}}$ eine P-Spannungsbelegung der Zweigmengemenge von \mathcal{G} . Paare $(b, \sigma) \in \mathcal{Z} \times \{+, -\}$ heißen *Zweigenden*, speziell heißt $(b, +)$ *positives Zweigende* und $(b, -)$ *negatives Zweigende*. Man bezeichnet zwei Zweigenden $(b, \sigma), (\bar{b}, \bar{\sigma})$ als *miteinander verbunden* (in \mathcal{G}), falls

$$\mathcal{A}_\sigma(b) = \mathcal{A}_{\bar{\sigma}}(\bar{b})$$

gilt. Jedem Zweigende $(b, \sigma) \in \mathcal{Z} \times \{+, -\}$ wird durch die Spannungsbelegung u eine Bewegung $u_{b\sigma}$ zugeordnet.

Es heißt, die Spannungsbelegung u erfüllt das *Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke* mit Graph \mathcal{G} , falls für alle miteinander verbundenen Zweigenden $(b, \sigma), (\bar{b}, \bar{\sigma})$ die durch u zugeordneten Bewegungen gleich sind, also für alle $(b, \sigma), (\bar{b}, \bar{\sigma}) \in \mathcal{Z} \times \{+, -\}$ aus $\mathcal{A}_\sigma(b) = \mathcal{A}_{\bar{\sigma}}(\bar{b})$ die Gleichung $u_{b\sigma} = u_{\bar{b}\bar{\sigma}}$ folgt.

Im folgenden wird auch einfach gesagt, ein P-Signal erfülle das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , wenn die zu diesem Signal gehörige P-Spannungsbelegung das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt. Die Menge aller P-Signale, die das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllen, bekommt das Symbol \mathcal{H}_{PU} .

Familien $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathbf{Bew}$ von Belegungen der Knotenmenge \mathcal{K} eines Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ werden im folgenden auch kurz *Knotenbelegungen* genannt. Jeder solchen Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ läßt sich eine P-Spannungsbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}_P$ gemäß

$$u_{b\sigma} := \phi_{\mathcal{A}_\sigma(b)}$$

zuordnen, welche im folgenden als die von $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ *erzeugte* P-Spannungsbelegung bezeichnet wird. Trivialerweise erfüllt jede aus einer Knotenbelegung erzeugte P-Spannungsbelegung auf \mathcal{Z} das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} . Aus der Anschauung heraus ist sofort klar, daß folgende stärkere Aussage gilt.

Lemma 6 (Spannungsbelegung und Knotenbelegung) Für eine P-Spannungsbelegung $u \in \mathcal{U}_P^{\mathcal{Z}}$ der Zweigmengemenge \mathcal{Z} eines Graphen \mathcal{G} sind äquivalent:

- (i) Die Spannungsbelegung u erfüllt das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} .
- (ii) Es existiert eine Knotenbelegung von \mathcal{G} , die u erzeugt.

Gilt Aussage (ii) (und somit (i)), so ist die u erzeugende Knotenbelegung bis auf die Werte für die isolierten Knoten von \mathcal{G} durch u eindeutig bestimmt.

Beweis:

(ii) \Rightarrow (i): Das ist klar.

(i) \Rightarrow (ii): Sei $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}_P$ eine Spannungsbelegung von \mathcal{Z} , die das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ erfüllt.

Zunächst wird angenommen, daß \mathcal{G} keine isolierten Knoten hat. Dann ist die Relation

$$\phi := \{(\mathcal{A}_\sigma(b), u_{b\sigma}) \mid b \in \mathcal{Z}, \sigma \in \{+, -\}\} \subset \mathbb{K} \times \mathbf{Bew}$$

linkstotal. Wäre ϕ nicht rechtseindeutig, so würden Zweigenden $(b, \sigma), (\bar{b}, \bar{\sigma}) \in \mathcal{Z} \times \{+, -\}$ mit $\mathcal{A}_\sigma(b) = \mathcal{A}_{\bar{\sigma}}(\bar{b})$ und $u_{b\sigma} \neq u_{\bar{b}, \bar{\sigma}}$ existieren, was der Voraussetzung widerspricht, daß u das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt. Somit ist ϕ eine Abbildung, d. h. eine Knotenbelegung von \mathcal{G} . Diese erzeugt die P-Spannungsbelegung u .

Hat \mathcal{G} isolierte Knoten, so gilt das eben Gesagte für den von \mathcal{Z} erzeugten Teilgraphen von \mathcal{G} . Die Werte, die eine Knotenbelegung für isolierte Knoten annimmt, haben keinen Einfluß auf die von ihr erzeugte P-Spannungsbelegung. Somit können diese Werte bei einer u erzeugenden Knotenbelegung willkürlich festgelegt werden. \square

Inhalt des folgenden Kirchhoffschen Stromgesetzes für P-Tragwerke sind die Kraftgrößengleichgewichte, denen miteinander verbundene Tragwerkelemente unterworfen sind.

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathbb{K}, \mathcal{A})$ ein Graph und (u, i) ein P-Signal auf der Zweigmengemenge \mathcal{Z} von \mathcal{G} . Es heißt, das Signal (u, i) erfüllt das *Kirchhoffsche Stromgesetz für P-Tragwerke* mit Graph \mathcal{G} , falls für jeden Inzidenzschnitt $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von \mathcal{G} die Gleichungen

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} F_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} F_b = 0 \quad (2.34)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} M_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} (M_b + [u_{b+}(0) - u_{b-}(0), F_b]) = 0 \quad (2.35)$$

erfüllt sind. Die Gleichung (2.34) heißt auch *Kräftegleichgewicht* und die Gleichung (2.35) *Momentengleichgewicht* im Schnitt $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$. Die Menge aller P-Signale, die das Kirchhoffsche Stromgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllen, bekommt das Symbol \mathcal{H}_{PI} .

Diejenigen Signale aus der P-Grundsignalmengemenge \mathcal{S}_P auf der Zweigmengemenge eines Graphen \mathcal{G} , die das Kirchhoffsche Spannungsgesetz und das Kirchhoffsche Stromgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllen, werden zum (bzgl. \mathcal{G}) *Kirchhoffschen Teil der P-Grundsignalmengemenge* auf \mathcal{Z} zusammengefaßt. Dieser wird in Analogie zur Netzwerktheorie mit \mathcal{H}_P bezeichnet.

Sei nun $\mathcal{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$ ein P-Tragwerk und \mathcal{S}_P die P-Grundsignalmengemenge auf der Zweigmengemenge des Graphen \mathcal{G} . Dann heißen Signale $(u, i) \in \mathcal{S}_P$, die den Kirchhoffschen Gesetzen für \mathcal{T}_P genügen und in der P-Verhaltensrelation \mathcal{V}_P enthalten sind, *Lösungen* von \mathcal{T}_P . Diese werden in der *Lösungsmengemenge*

$$\mathcal{L}_P := \mathcal{H}_P \cap \mathcal{V}_P$$

von \mathcal{T}_P zusammengefaßt.

2.5.2 Netzwerkhähnliche Modellierung von Stabtragwerken

Im folgenden heiße

$$\mathcal{U}_N := \mathbf{Bew}$$

N-Spannungsraum. Durch die Elemente von \mathcal{U}_N , genannt *N-Spannungen*, können Formen der Tragwerkelemente eines Stabtragwerkes beschrieben werden. Weiterhin bekommt (rein formal) der Vektorraum

$$\mathfrak{I}_N := \mathfrak{I}_P = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$$

den Namen *N-Stromraum*. Die Elemente des N-Stromraumes, genannt *N-Ströme*, werden genutzt, um die zur Verformung von Tragwerkelementen benötigten Kraftgrößen zu beschreiben.

In Analogie zur physikalischen Modellierung von Stabtragwerken wird weiter die *N-Grundsignalmenge*

$$\mathfrak{S}_N := \mathcal{U}_N^Z \times \mathfrak{I}_N^Z$$

auf einer endlichen Menge \mathcal{Z} eingeführt. Als *netzwerkähnliches Stabtragwerksmodell* oder kurz als *N-Tragwerk* wird dann ein Tripel $(\mathcal{G}, \mathcal{V}_N, \mathcal{Z}_T)$ eines Graphen \mathcal{G} mit Zweigmengem \mathcal{Z} , einer Teilmenge \mathcal{V}_N der N-Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} und einer Teilmenge \mathcal{Z}_T von \mathcal{Z} bezeichnet.

Die Menge \mathcal{V}_N heißt *N-Verhaltensrelation* von \mathfrak{T}_N und \mathcal{Z}_T *Trägheitszweigmengem* von \mathfrak{T}_N .

Ein P-Signal aus der Verhaltensrelation eines P-Tragwerkes beschreibt eine mögliche Bewegung der Tragwerkelemente eines Stabtragwerkes zusammen mit den für diese Bewegung benötigten Kraftgrößen.

Mittels der im folgenden eingeführten Abbildung \mathfrak{N} wird einem P-Signal ein N-Signal zugeordnet, das die Formen der Tragwerkelemente und die für Verformungen benötigten Kraftgrößen beschreibt. Über diese Abbildung wird den N-Tragwerken ein physikalischer Hintergrund verliehen.

Gegeben seien ein Graph \mathcal{G} mit der Zweigmengem \mathcal{Z} und eine Trägheitszweigmengem $\mathcal{Z}_T \subset \mathcal{Z}$. Weiter sei \mathfrak{S}_P die P-Grundsignalmengem auf \mathcal{Z} und \mathfrak{S}_N die N-Grundsignalmengem auf \mathcal{Z} .

Dann ordne die Abbildung $\mathfrak{N} : \mathfrak{S}_P \rightarrow \mathfrak{S}_N$ jedem P-Signal $(u, i) \in \mathfrak{S}_P$ dasjenige N-Signal $(\tilde{u}, \tilde{i}) \in \mathfrak{S}_N$ zu, welches auf allen Zweigen $b \in \mathcal{Z}$ den Bedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{u}_b &= u_{b+}^{-1} \circ u_{b-} \\ \tilde{F}_b &= Du_{b+}^{-1} F_b \\ \tilde{M}_b &= Du_{b+}^{-1} M_b \end{aligned}$$

genügt.

Jedem P-Tragwerk $\mathfrak{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$ wird dann durch $\mathcal{V}_N := \mathfrak{N}(\mathcal{V}_P)$ ein N-Tragwerk $\mathfrak{T}_N = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_N, \mathcal{Z}_T)$ zugeordnet. Die Einschränkung dieser Zuordnung auf eine wichtige, im folgenden vorgestellte Klasse von P-Tragwerken ist sogar bijektiv.

Sei $\mathfrak{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$ ein P-Tragwerk und \mathfrak{S}_{PT} der *die Trägheitszweigmengem \mathcal{Z}_T respektierende Teil der P-Grundsignalmengem* auf \mathcal{Z} , d. h. die Menge aller P-Signale (u, i) auf \mathcal{Z} , für die

$$\forall b \in \mathcal{Z}_T : u_{b+} = \mathbf{Id}$$

gilt. Im folgenden wird \mathfrak{T}_P als *bewegungsinvariant* bezeichnet, falls zu jedem P-Signal $(u, i) \in \mathcal{V}_P$ auch jedes P-Signal $(\bar{u}, \bar{i}) \in \mathfrak{S}_{PT}$ mit

$$\mathfrak{N}(\bar{u}, \bar{i}) = \mathfrak{N}(u, i)$$

in \mathcal{V}_P enthalten ist.

Lemma 7 (Bewegungsinvarianz) *Zu jedem N-Tragwerk \mathfrak{T}_N existiert genau ein bewegungsinvariantes P-Tragwerk \mathfrak{T}_P , so daß \mathfrak{T}_N das dem P-Tragwerk \mathfrak{T}_P zugeordnete N-Tragwerk ist.*

Beweis: Sei $\mathfrak{T}_N = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_N, \mathcal{Z}_T)$ ein beliebiges N-Tragwerk.

Zunächst wird davon ausgegangen, daß ein bewegungsinvariantes P-Tragwerk $\mathfrak{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$ existiert, dem \mathfrak{T}_N zugeordnet ist. Aus $\mathfrak{N}(\mathcal{V}_P) = \mathcal{V}_N$ folgt $\mathcal{V}_P \subset \mathfrak{N}^{-1}(\mathcal{V}_N)$. Außerdem gilt $\mathcal{V}_P \subset \mathfrak{S}_{PT}$ und somit

$$\mathcal{V}_P \subset \mathfrak{S}_{PT} \cap \mathfrak{N}^{-1}(\mathcal{V}_N) \quad (2.36)$$

Die Bewegungsinvarianz von \mathfrak{T}_P bedeutet, daß in \mathcal{V}_P schon alle P-Signale enthalten sind, die die Trägheitszweigmengen \mathcal{Z}_T respektieren und unter \mathfrak{N} auf N-Signale aus $\mathcal{V}_N = \mathfrak{N}(\mathcal{V}_P)$ abgebildet werden, also kurz

$$\mathfrak{S}_{PT} \cap \mathfrak{N}^{-1}(\mathcal{V}_N) \subset \mathcal{V}_P. \quad (2.37)$$

Aus der Gültigkeit der beiden Ungleichungen (2.36) und (2.37) folgt die Gleichung

$$\mathcal{V}_P = \mathfrak{S}_{PT} \cap \mathfrak{N}^{-1}(\mathcal{V}_N). \quad (2.38)$$

Damit ist \mathfrak{T}_P eindeutig bestimmt.

Die Existenz von \mathfrak{T}_P ist auch klar, da (2.38) als definierende Gleichung für \mathcal{V}_P genutzt werden kann. Das dadurch festgelegte P-Tragwerk $\mathfrak{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$ ist bewegungsinvariant und hat \mathfrak{T}_N als zugeordnetes N-Tragwerk. \square

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph und \mathcal{H}_P bzgl. \mathcal{G} der Kirchhoffsche Teil der P-Grundsignalmenge \mathfrak{S}_P auf \mathcal{Z} . Im folgenden wird für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} ein Kirchhoffscher Teil \mathcal{H}_N der N-Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} gerade so eingeführt, daß die Gleichung

$$\mathcal{H}_N = \mathfrak{N}(\mathcal{H}_P)$$

gilt.

Sei (u, i) ein beliebiges P-Signal auf \mathcal{Z} . Nach Lemma 6 existiert genau dann eine Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathbf{Bew}$ von \mathcal{G} , die die P-Spannungsbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ erzeugt, falls $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt.

Für die N-Spannungsbelegung \tilde{u} aus $(\tilde{u}, \tilde{i}) := \mathfrak{N}(u, i)$ gilt dann

$$\tilde{u}_b = u_{b+}^{-1} \circ u_{b-} = \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{A}_-(b)} \quad (2.39)$$

$$\tilde{u}_b^{-1} = \phi_{\mathcal{A}_-(b)}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{A}_+(b)}. \quad (2.40)$$

Das heißt, die Knotenbelegung $(\phi_n^{-1})_{n \in \mathcal{K}}$ paßt bzgl. \mathcal{G} zu der Zweigbelegung $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$. Nach Satz 3 erfüllt damit $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ das verallgemeinerte Kirchhoffsche Spannungsgesetz.

Lemma 8 *Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph und (u, i) ein P-Signal auf \mathcal{Z} . Wird $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ durch eine Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathbf{Bew}$ erzeugt, so paßt $(\phi_n^{-1})_{n \in \mathcal{K}}$ zur N-Spannungsbelegung $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ von $(\tilde{u}, \tilde{i}) := \mathfrak{N}(u, i)$.*

\square

Diese Schlußweise läßt sich in gewissem Sinne umkehren. Sei (\tilde{u}, \tilde{i}) ein beliebiges N-Signal auf \mathcal{Z} , für das die Zweigbelegung $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ das verallgemeinerte Kirchhoffsche Spannungsgesetz erfüllt. Dann sichert Satz 4 die Existenz einer zu $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ passenden Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathbf{Bew}$ von \mathcal{G} . Für das P-Signal $(u, i) \in \mathfrak{S}_P$ mit der von $(\phi_n^{-1})_{n \in \mathcal{K}}$ erzeugten P-Spannungsbelegung u und der P-Strombelegung i , die sich aus den Gleichungen

$$F_b := D\phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}(\tilde{F}_b) = Du_{b+}\tilde{F}_b \quad (2.41)$$

$$M_b := D\phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}(\tilde{M}_b) = Du_{b-}\tilde{M}_b \quad (2.42)$$

$(\forall b \in \mathcal{Z})$ ergibt, gilt dann gerade $\mathfrak{N}(u, i) = (\tilde{u}, \tilde{i})$. Da u von einer Knotenbelegung von \mathcal{G} erzeugt wird, erfüllt (u, i) das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} .

Die Menge derjenigen P-Signale (u, i) auf der Zweigmengung \mathcal{Z} , deren Spannungsbelegung u das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllen, wird also unter \mathfrak{N} auf die Menge der N-Signale (\tilde{u}, \tilde{i}) auf \mathcal{Z} abgebildet, für die die Zweigbelegungen $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ das verallgemeinerte Kirchhoffsche Spannungsgesetz erfüllen.

Im nächsten Lemma werden diese Tatsachen zusammengefaßt. Es motiviert nocheinmal die nun folgende Definition.

Sei \mathcal{G} ein Graph mit Zweigmengung \mathcal{Z} und u eine N-Spannungsbelegung von \mathcal{Z} . Es heißt, u erfüllt das *Kirchhoffsche Spannungsgesetz für N-Tragwerke* mit Graph \mathcal{G} , falls die Zweigbelegung $(u_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ dem verallgemeinerten Kirchhoffschen Spannungsgesetz bzgl. \mathcal{G} genügt. Ein N-Signal (u, i) auf \mathcal{Z} erfüllt das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , falls dies für seine Spannungsbelegung u gilt. Eine Menge von N-Spannungsbelegungen von \mathcal{Z} bzw. N-Signalen auf \mathcal{Z} erfüllt dieses Gesetz, wenn alle ihre Elemente ihm genügen.

Satz 6 Seien \mathcal{G} ein Graph mit Zweigmengung \mathcal{Z} , \mathcal{H}_{PU} der Teil der P-Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} , der das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt und \mathcal{H}_{NU} der Teil der N-Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} , der das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt. Dann gilt

$$\mathcal{H}_{NU} = \mathfrak{N}(\mathcal{H}_{PU}).$$

Als nächstes soll ein Kirchhoffsches Stromgesetz für N-Tragwerke entwickelt werden. Dazu muß jedoch anders vorgegangen werden als beim Kirchhoffschen Spannungsgesetz für N-Tragwerke. Das soll zunächst anhand eines Beispiels verdeutlicht werden. Seien $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph, \mathfrak{S}_P die P-Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} und \mathfrak{S}_N die N-Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} . Im Vorgriff sei der Teil von \mathfrak{S}_N , der das Kirchhoffsche Stromgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt, mit \mathcal{H}_{NI} bezeichnet.

Es ist nicht sinnvoll, analog dem Spannungsgesetz für N-Tragwerke $\mathcal{H}_{NI} = \mathfrak{N}(\mathcal{H}_{PI})$ zu verlangen. Dann kann es nämlich vorkommen, daß

$$\mathfrak{N}(\mathcal{H}_{PU}) \cap \mathfrak{N}(\mathcal{H}_{PI}) \neq \mathfrak{N}(\mathcal{H}_{PU} \cap \mathcal{H}_{PI})$$

gilt, womit das Ziel $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{NU} \cap \mathcal{H}_{NI} = \mathfrak{N}(\mathcal{H}_{PU} \cap \mathcal{H}_{PI}) = \mathfrak{N}(\mathcal{H}_P)$ verfehlt wäre. Zum Beispiel sei \mathcal{G} der in Bild 2.5 dargestellte Graph mit $\mathcal{Z} = \{1, 2\}$. Dann erfüllt das P-Signal (u, i) mit

$$u_{1+} = u_{1-} = u_{2+} = u_{2-} = \mathbf{Id}, \quad (2.43)$$

$$F_1 = F_2 = (1, 0, 0); \quad M_1 = M_2 = 0 \quad (2.44)$$

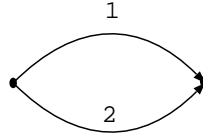


Abbildung 2.5: Graph zum Beispiel im Text.

das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , ist also in \mathcal{H}_{PU} enthalten. Das P-Signal (\bar{u}, \bar{i}) mit

$$\bar{u}_{1+} = \bar{u}_{1-} = \mathbf{Id}; \quad \bar{u}_{2+} = \bar{u}_{2-} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$\bar{F}_1 = (1, 0, 0); \quad \bar{F}_2 = (-1, 0, 0); \quad \bar{M}_1 = \bar{M}_2 = 0 \quad (2.46)$$

erfüllt wiederum das Kirchhoffsche Stromgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , ist also in \mathcal{H}_{PI} enthalten.

Beiden P-Signalen ist das gleiche N-Signal (\tilde{u}, \tilde{i}) mit $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = \mathbf{Id}$ und $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 = (1, 0, 0)$, $\tilde{M}_1 = \tilde{M}_2 = 0$ zugeordnet, es gilt also $(\tilde{u}, \tilde{i}) \in \mathfrak{N}(\mathcal{H}_{PU}) \cap \mathfrak{N}(\mathcal{H}_{PI})$. Jedoch existiert kein P-Signal, das beide Kirchhoffsche Gesetze erfüllt und dem das N-Signal (\tilde{u}, \tilde{i}) zugeordnet ist.

Nach diesen Vorüberlegungen wird nun ein Kirchhoffsches Stromgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} entwickelt.

Sei (u, i) ein beliebiges P-Signal auf der Zweigmengung \mathcal{Z} eines Graphen \mathcal{G} , welches das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt. Laut Definition genügt (u, i) genau dann dem Kirchhoffschen Stromgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , wenn für jeden Inzidenzchnitt $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ die Kraftgrößengleichgewichte

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} F_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} F_b = 0 \quad (2.47)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} M_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} (M_b + [u_{b+}(0) - u_{b-}(0), F_b]) = 0 \quad (2.48)$$

gelten. Drückt man die Kraftgrößen des P-Signals (u, i) durch die Kraftgrößen $\tilde{F}_b = Du_{b+}^{-1} F_b$ und $\tilde{M}_b = Du_{b+}^{-1} M_b$ des zugehörigen N-Signals (\tilde{u}, \tilde{i}) aus, so erhält man die zu (2.47, 2.48) äquivalenten Gleichungen

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} Du_{b+} \tilde{F}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} Du_{b+} \tilde{F}_b = 0 \quad (2.49)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} Du_{b+} \tilde{M}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \left(Du_{b+} \tilde{M}_b + [u_{b+}(0) - u_{b-}(0), Du_{b+} \tilde{F}_b] \right) = 0 \quad (2.50)$$

Die P-Spannungsbelegung u erfüllt nach Voraussetzung das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} . Also wird u von einer Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ erzeugt. Ist $n \in \mathcal{K}$ der zu dem Inzidenzchnitt $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ gehörige Knoten, so gilt

$$\forall b \in \mathcal{Z}^+ : u_{b+} = \phi_n \quad (2.51)$$

$$\forall b \in \mathcal{Z}^- : u_{b-} = \phi_n \quad (2.52)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (2.49,2.50) weiter umschreiben zu

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} D\phi_n \tilde{F}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} Du_{b+} \tilde{F}_b = 0 \quad (2.53)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} D\phi_n \tilde{M}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \left(Du_{b+} \tilde{M}_b + \left[u_{b+}(0) - u_{b-}(0), Du_{b+} \tilde{F}_b \right] \right) = 0. \quad (2.54)$$

Die Multiplikation mit dem Vektorraumisomorphismus $D\phi_n^{-1}$ ist eine äquivalente Umformung der Gleichungssysteme (2.53) und (2.54) in den Variablen \tilde{F}_b und \tilde{M}_b ($b \in \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-$). Weiterhin gelten die Gleichungen

$$\left[u_{b+}(0) - u_{b-}(0), Du_{b+} \tilde{F}_b \right] = Du_{b+} \left[Du_{b+}^{-1} (u_{b+}(0) - u_{b-}(0)), \tilde{F}_b \right]$$

(Invarianz von $[\bullet, \bullet]$ gegenüber orientierungserhaltenden Isometrien) und

$$\tilde{u}_b(0) = u_{b+}^{-1}(u_{b-}(0)) = Du_{b+}^{-1} (u_{b-}(0) - u_{b+}(0)).$$

Damit erhält man die zu (2.53,2.54) äquivalenten Gleichungen

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \tilde{F}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} D\phi_n^{-1} Du_{b+} \tilde{F}_b = 0 \quad (2.55)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \tilde{M}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \left(D\phi_n^{-1} Du_{b+} \tilde{M}_b - D\phi_n^{-1} Du_{b+} \left[\tilde{u}_b(0), \tilde{F}_b \right] \right) = 0. \quad (2.56)$$

Beachtet man, daß für $b \in \mathcal{Z}^-$ die Gleichungskette

$$D\phi_n^{-1} \circ Du_{b+} = Du_{b+}^{-1} \circ Du_{b+} = D\tilde{u}_b^{-1}$$

gilt, kann man alle Größen des P-Signals durch Größen des zugehörigen N-Signals ersetzen:

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \tilde{F}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} D\tilde{u}_b^{-1} \tilde{F}_b = 0 \quad (2.57)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \tilde{M}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} D\tilde{u}_b^{-1} \left(\tilde{M}_b - \left[\tilde{u}_b(0), \tilde{F}_b \right] \right) = 0. \quad (2.58)$$

Die Ergebnisse werden in der nächsten Folgerung zusammengefaßt, die gleichzeitig die folgenden Definitionen motiviert.

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph und (\tilde{u}, \tilde{i}) ein N-Signal auf \mathcal{Z} . Es heißt, (\tilde{u}, \tilde{i}) erfüllt das *Kirchhoffsche Stromgesetz für N-Tragwerke* mit Graph \mathcal{G} , falls für jeden Inzidenz-schnitt $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von \mathcal{G} die Gleichungen

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \tilde{F}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} D\tilde{u}_b^{-1} \tilde{F}_b = 0, \quad (2.59)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \tilde{M}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} D\tilde{u}_b^{-1} \left(\tilde{M}_b - \left[\tilde{u}_b(0), \tilde{F}_b \right] \right) = 0 \quad (2.60)$$

erfüllt sind. Eine Teilmenge von N-Signalen auf \mathcal{Z} erfüllt das Kirchhoffsche Stromgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , falls dies für alle ihre Elemente gilt. Die Menge \mathcal{H}_N aller N-Signale auf \mathcal{Z} , die das Kirchhoffsche Spannungsgesetz und das Kirchhoffsche Stromgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllen, heißt *Kirchhoffscher Teil* von \mathcal{S}_N für Tragwerke mit Graph \mathcal{G} .

Folgerung 7 Sei \mathcal{G} ein Graph mit Zweigmengem \mathcal{Z} .

- (i) Ist (u, i) ein P-Signal auf \mathcal{Z} , welches das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt, so genügt das zugehörige N-Signal $\mathfrak{N}(u, i)$ genau dann dem Kirchhoffschen Stromgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , falls (u, i) dem Kirchhoffschen Stromgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} genügt.
- (ii) Mit \mathcal{H}_P und \mathcal{H}_N , den Kirchhoffschen Teilen der Grundsignalmengen für P- bzw. N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , gilt die Gleichung

$$\mathcal{H}_N = \mathfrak{N}(\mathcal{H}_P).$$

□

Ist $\mathfrak{T}_N = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_N, \mathcal{Z}_T)$ ein N-Tragwerk und \mathcal{H}_N der Kirchhoffsche Teil der zugehörigen N-Grundsignalmenge, so wird

$$\mathcal{L}_N := \mathcal{H}_N \cap \mathcal{V}_N$$

im folgenden als *Lösungsmenge* von \mathfrak{T}_N bezeichnet.

Lemma 9 Sei \mathcal{L}_P die Lösungsmenge eines bewegungsinvarianten P-Tragwerkes \mathfrak{T}_P . Dann ergibt sich die Lösungsmenge \mathcal{L}_N des \mathfrak{T}_P zugeordneten N-Tragwerkes durch

$$\mathcal{L}_N = \mathfrak{N}(\mathcal{L}_P).$$

Beweis: Das P-Tragwerk aus dem Lemma sei gegeben durch $\mathfrak{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$, womit sich das zugehörige N-Tragwerk $\mathfrak{T}_N = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_N, \mathcal{Z}_T)$ aus $\mathcal{V}_N = \mathfrak{N}(\mathcal{V}_P)$ ergibt. Die Kirchhoffschen Teile der Grundsignalmengen von \mathfrak{T}_P bzw. \mathfrak{T}_N seien wieder mit \mathcal{H}_P bzw. \mathcal{H}_N bezeichnet.

Aus der Mengenlehre ist klar, daß die Inklusion

$$\mathcal{L}_N = \mathcal{H}_N \cap \mathcal{V}_N = \mathfrak{N}(\mathcal{H}_P) \cap \mathfrak{N}(\mathcal{V}_P) \supset \mathfrak{N}(\mathcal{H}_P \cap \mathcal{V}_P) = \mathfrak{N}(\mathcal{L}_P)$$

gilt. Bleibt zu zeigen, daß jede Lösung des N-Tragwerkes auch in $\mathfrak{N}(\mathcal{H}_P \cap \mathcal{V}_P)$ enthalten ist.

Sei $(\tilde{u}, \tilde{i}) \in \mathfrak{N}(\mathcal{H}_P) \cap \mathfrak{N}(\mathcal{V}_P)$. Es gibt also $(\bar{u}, \bar{i}) \in \mathcal{H}_P$ mit $(\tilde{u}, \tilde{i}) = \mathfrak{N}(\bar{u}, \bar{i})$. Es läßt sich leicht zeigen, daß es dann sogar ein P-Signal $(u, i) \in \mathcal{H}_P$ mit $(\tilde{u}, \tilde{i}) = \mathfrak{N}(u, i)$ gibt, das zusätzlich die Trägheitszweigmengem respektiert, für welches also $u_{b+} = \mathbf{Id}$ ($\forall b \in \mathcal{Z}_T$) gilt. Mit $\psi := \bar{u}_{b+}$ für einen (und dann alle) Trägheitszweig(e) $b \in \mathcal{Z}_T$ setze man einfach

$$\forall b \in \mathcal{Z}, \forall \sigma \in \{+, -\} :$$

$$\begin{aligned} u_{b\sigma} &:= \psi^{-1} \bar{u}_{b\sigma}, \\ F_b &:= D\psi^{-1} \bar{F}_b \\ M_b &:= D\psi^{-1} \bar{M}_b. \end{aligned}$$

Da \mathfrak{T}_P bewegungsinvariant ist, enthält \mathcal{V}_P alle P-Signale auf \mathcal{Z} , die die Trägheitszweigmengem respektieren und unter \mathfrak{N} auf (\tilde{u}, \tilde{i}) abgebildet werden, also speziell auch (u, i) . Somit ist (\tilde{u}, \tilde{i}) Lösung von \mathfrak{T}_P , und es gilt $(\tilde{u}, \tilde{i}) = \mathfrak{N}(u, i)$. □

Um zunächst schnell alle grundlegenden Begriffe zur Behandlung von N-Tragwerken einzuführen, wurde bis jetzt noch nicht auf den Zusammenhang des Kirchhoffschen Stromgesetzes für N-Tragwerke mit dem modifizierten Kirchhoffschen Stromgesetz aus Abschnitt 1.4 eingegangen. Dies soll jetzt nachgeholt werden.

Für jedes $\phi \in \mathcal{U}_N$ sei durch

$$\mathrm{Tr}_\phi(F, M) := (\mathrm{D}\phi F, \mathrm{D}\phi(M - [\phi^{-1}(0), F]))$$

für alle Kraftgrößenpaare $(F, M) \in \mathfrak{L}_N$ eine lineare Abbildung $\mathrm{Tr}_\phi : \mathfrak{L}_N \rightarrow \mathfrak{L}_N$ definiert.

Die Verkettung zweier solcher Abbildungen $\mathrm{Tr}_\phi, \mathrm{Tr}_\psi$, welche durch zwei beliebige N-Spannungen ϕ, ψ gegeben seien, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} (\mathrm{Tr}_\phi \circ \mathrm{Tr}_\psi)(F, M) &= \mathrm{Tr}_\phi(\mathrm{D}\psi F, \mathrm{D}\psi(M - [\psi^{-1}(0), F])) \\ &= (\mathrm{D}\phi \mathrm{D}\psi F, \mathrm{D}\phi(\mathrm{D}\psi(M - [\psi^{-1}(0), F]) - [\phi^{-1}(0), \mathrm{D}\psi F])) \\ &= \left(\mathrm{D}(\phi \circ \psi) F, \mathrm{D}(\phi \circ \psi) \left(M - \left[\underbrace{\psi^{-1}(0) + \mathrm{D}\psi^{-1} \phi^{-1}(0)}_{\psi^{-1}(\phi^{-1}(0)) = (\phi \circ \psi)^{-1}(0)}, F \right] \right) \right) \\ &= \mathrm{Tr}_{\phi \circ \psi}(F, M) \quad \forall (F, M) \in \mathfrak{L}_N. \end{aligned}$$

Außerdem rechnet man leicht nach, daß $\mathrm{Tr}_{\mathbf{Id}_{\mathbb{R}^3}} = \mathbf{Id}_{\mathfrak{L}_N}$ gilt.

Die Gleichung

$$\mathbf{Id} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{Id}} = \mathrm{Tr}_{\phi \circ \phi^{-1}} = \mathrm{Tr}_\phi \circ \mathrm{Tr}_{\phi^{-1}}$$

zeigt, daß für beliebiges $\phi \in \mathcal{U}_N$ die Abbildung $\mathrm{Tr}_{\phi^{-1}}$ die Inverse zu Tr_ϕ ist. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Menge $\mathrm{Tr}_{\mathcal{U}_N}$ aller Abbildungen Tr_ϕ mit $\phi \in \mathcal{U}_N$ eine Automorphismengruppe von \mathfrak{L}_N bildet und die Zuordnung $\phi \in \mathcal{U}_N \mapsto \mathrm{Tr}_\phi \in \mathrm{Tr}_{\mathcal{U}_N}$ einen Gruppenhomomorphismus darstellt.

Sei nun \mathcal{G} ein Graph und (u, i) ein N-Signal auf der Zweigmengemenge \mathcal{Z} von \mathcal{G} . Wie weiter vorne festgelegt, erfüllt (u, i) genau dann das Kirchhoffsche Stromgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , falls für jeden Inzidenzschnitt $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von \mathcal{G} die Gleichungen

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} F_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \mathrm{D}u_b^{-1} F_b = 0 \quad (2.61)$$

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} M_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \mathrm{D}u_b^{-1} (M_b - [u_b(0), F_b]) = 0 \quad (2.62)$$

erfüllt sind. Mit $\mathrm{Tr}_{u_b^{-1}}(F_b, M_b) = (\mathrm{D}u_b^{-1} F_b, \mathrm{D}u_b^{-1} (M_b - [u_b(0), F_b]))$ ($\forall b \in \mathcal{Z}^-$) lassen sich die Gleichungen in der Form

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} i_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \mathrm{Tr}_{u_b^{-1}}(i_b) = 0$$

schreiben. (Hier ist \mathfrak{L}_N als direkte Summe $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ zu interpretieren.) Das Kirchhoffsche Stromgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} läßt sich also äquivalent in folgender Weise formulieren.

Lemma 10 Sei \mathcal{G} ein Graph und (u, i) ein N-Signal auf der Zweigmengemenge \mathcal{Z} von \mathcal{G} .

Das Signal (u, i) erfüllt genau dann das Kirchhoffsche Stromgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , falls $(i_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ dem durch $(\text{Tr}_{u_b^{-1}})_{b \in \mathcal{Z}}$ modifizierten Kirchhoffschen Stromgesetz (bzgl. \mathcal{G}) genügt.

□

Da der Homomorphismus $\phi \in \mathcal{U}_N \mapsto \text{Tr}_\phi$ die Verkettung als Gruppenoperation respektiert, übertragen sich wichtige Eigenschaften von N-Spannungsbelegungen $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}_N$ der Zweigmengemenge \mathcal{Z} eines Graphen auf die zugehörigen Zweigbelegungen $(\text{Tr}_{u_b})_{b \in \mathcal{Z}} \subset \mathcal{U}_N$. Speziell sind folgende Aussagen sofort einzusehen.

Lemma 11 Seien ein Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$, eine N-Spannungsbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ auf \mathcal{Z} und eine Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathcal{U}_N$ gegeben.

- (i) Paßt $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ bzgl. \mathcal{G} zu $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$, so paßt auch $(\text{Tr}_{\phi_n})_{n \in \mathcal{K}}$ bzgl. \mathcal{G} zu $(\text{Tr}_{u_b})_{b \in \mathcal{Z}}$.
- (ii) Erfüllt $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ das verallgemeinerte Kirchhoffsche Spannungsgesetz bzgl. \mathcal{G} , so erfüllt auch $(\text{Tr}_{u_b})_{b \in \mathcal{Z}}$ das verallgemeinerte Kirchhoffsche Spannungsgesetz bzgl. \mathcal{G} .
- (iii) Erfüllt $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , so erfüllt $(\text{Tr}_{u_b^{-1}})_{b \in \mathcal{Z}}$ das verallgemeinerte Kirchhoffsche Spannungsgesetz bzgl. \mathcal{G} .

Beweis: Aussage (i) ist klar, außerdem gilt $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. □

Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph und \mathcal{H}_N sei der Kirchhoffsche Teil der N-Grundsignalmenge für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} . Das Lemma ermöglicht es, die modifizierte Maschenstromanalyse aus Abschnitt 1.4 zur Parametrisierung von \mathcal{H}_N zu nutzen. Zunächst wird mit Hilfe der verallgemeinerten Knotenspannungsanalyse die Menge \mathcal{U}_{NH} aller N-Spannungsbelegungen auf \mathcal{Z} parametrisiert, die das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllen.

Bisher wurde im wesentlichen beschrieben, wie sich aus der physikalischen Modellierung von Stabtragwerken eine netzwerkähnliche Modellierung von Stabtragwerken entwickeln läßt. Für eine Rechtfertigung der netzwerkähnlichen Modellierung ist noch interessant, inwiefern sich aus der Lösungsmenge eines netzwerkähnlichen Tragwerkmodells die Lösungsmenge eines zugehörigen physikalischen Tragwerkmodells gewinnen läßt. Dies soll abschließend behandelt werden.

Zunächst zeigt das folgende einfache Beispiel, daß für ein P-Tragwerk $\mathfrak{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$ mit der Lösungsmenge \mathcal{L}_P und sein zugehöriges N-Tragwerk $\mathfrak{T}_N = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_N, \mathcal{Z}_T)$ nicht unbedingt $\mathcal{L}_P = \mathfrak{I}^{-1}(\mathcal{L}_N)$ gelten muß.

Es sei \mathcal{G} der in Bild 2.5 dargestellte Graph mit der Zweigmengemenge $\{1, 2\}$, die Trägheitszweigmengemenge \mathcal{Z}_T sei leer, und die P-Verhaltensrelation \mathcal{V}_P sei durch die Gleichungen

$$F_1 = (1, 0, 0), \quad F_2 = (-1, 0, 0), \quad M_1 = M_2 = 0$$

gegeben.

Die Verhaltensrelation des zugeordneten N-Tragwerkes ergibt sich zu

$$\mathcal{V}_N = \mathfrak{I}(\mathcal{V}_P) = \left\{ (\tilde{u}, \tilde{i}) \in \mathcal{U}_N^{\mathcal{Z}} \times \mathcal{I}_N^{\mathcal{Z}} \mid \|\tilde{F}_1\| = \|\tilde{F}_2\| = 1 \wedge \tilde{M}_1 = \tilde{M}_2 = 0 \right\}.$$

Das N-Signal (\tilde{u}, \tilde{i}) auf \mathcal{Z} mit

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \tilde{u}_2 = \mathbf{Id}, \\ \tilde{F}_1 &= (1, 0, 0), \quad \tilde{F}_2 = (-1, 0, 0), \quad \tilde{M}_1 = \tilde{M}_2 = 0 \end{aligned}$$

ist Lösung des N-Tragwerkes. Mit der Drehmatrix

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt für das durch

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1+} &= \bar{u}_{1-} = \bar{u}_{2+} = \bar{u}_{2-} = Q, \\ \bar{F}_1 &= (0, -1, 0), \quad \bar{F}_2 = (0, 1, 0), \quad \bar{M}_1 = \bar{M}_2 = 0 \end{aligned}$$

gegebene P-Signal (\bar{u}, \bar{i}) auf \mathcal{Z} die Gleichung $\mathfrak{P}(\bar{u}, \bar{i}) = (\tilde{u}, \tilde{i})$. Jedoch ist (\bar{u}, \bar{i}) nicht in \mathcal{V}_P enthalten. Das liegt an der fehlenden Bewegungsinvarianz von \mathfrak{T}_P .

Ein weiteres Signal (\hat{u}, \hat{i}) auf \mathcal{Z} sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{u}_{1+}(x) &= \hat{u}_{1-}(x) = (1, 0, 0) + x \quad (\forall x \in \mathbb{R}^3), \\ \hat{u}_{2+} &= \hat{u}_{2-} = \mathbf{Id}, \\ \hat{F}_1 &= (1, 0, 0), \quad \hat{F}_2 = (-1, 0, 0), \quad \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 0. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß auch für dieses P-Signal $\mathfrak{P}(\hat{u}, \hat{i}) = (\tilde{u}, \tilde{i})$ gilt. Außerdem ist (\hat{u}, \hat{i}) in \mathcal{V}_P enthalten. Jedoch erfüllt dieses P-Signal nicht das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für \mathfrak{T}_P und ist somit auch keine Lösung von \mathfrak{T}_P . Die Ursache hierfür liegt darin, daß beim Übergang von der physikalischen zur netzwerkähnlichen Modellierung von Tragwerken von der Lage der Tragwerkelemente im Raum abstrahiert wird.

Auf der Grundlage des Algorithmus 1 aus Abschnitt 1.3 ist jedoch für ein bewegungsinvariantes P-Tragwerk die Rekonstruktion der Lösungsmenge aus der des zugehörigen N-Tragwerkes auf einfache Weise, d. h. ohne die Auflösung von Gleichungssystemen möglich.

Seien $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph, $\mathfrak{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$ ein bewegungsinvariantes P-Tragwerk und $\mathfrak{T}_N = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_N, \mathcal{Z}_T)$ das diesem zugeordnete N-Tragwerk mit $\mathcal{V}_N = \mathfrak{P}(\mathcal{V}_P)$. Weiterhin werden die schon früher vereinbarten Symbole \mathfrak{S}_P , \mathfrak{S}_N , \mathfrak{S}_{PT} , \mathcal{H}_P und \mathcal{H}_{PU} genutzt.

Ist \mathfrak{P} bijektiv, wie das für Tragwerke mit $\mathcal{Z}_T = \mathcal{Z}$ der Fall ist, so folgt $\mathcal{L}_P = \mathfrak{P}^{-1}(\mathcal{L}_N)$ aus Lemma 9. Gilt jedoch $\mathcal{Z} \neq \mathcal{Z}_T$, so ist die Abbildung \mathfrak{P} nicht invertierbar, da durch \mathfrak{P} von der Lage derjenigen Tragwerkelemente, die keine Trägheiten sind, abstrahiert wird.

Im folgendem wird eine Abbildung h definiert, die wenigstens für N-Signale, die das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für \mathfrak{T}_N erfüllen, ähnliche Eigenschaften wie eine Inverse zu \mathfrak{P} aufweist. Die grundlegenden Ideen dazu sind schon aus den Vorüberlegungen zum Kirchhoffschen Spannungsgesetz für N-Tragwerke bekannt.

Sei $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ eine Bezugsknotenmenge. Die Abbildung $h : \mathcal{H}_{NU} \times \mathcal{U}^{\mathcal{K}'} \rightarrow \mathcal{H}_{PU}$ ordnet jedem Paar eines N-Signales $(\tilde{u}, \tilde{i}) \in \mathcal{H}_{NU}$ und einer Bezugsknotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'} \subset \mathbf{Bew}$ ein P-Signal

$$(u, i) = h((\tilde{u}, \tilde{i}), (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'})$$

nach folgender Vorschrift zu. Da die Zweigbelegung $(u_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ das verallgemeinerte Kirchhoffsche Spannungsgesetz bzgl. \mathcal{G} erfüllt, ist die Bezugsbelegung $(\phi_n^{-1})_{n \in \mathcal{K}'}$ nach Satz 4 zu einer Knotenbelegung $(\phi_n^{-1})_{n \in \mathcal{K}}$ fortsetzbar, so daß $(\phi_n^{-1})_{n \in \mathcal{K}}$ zu $(u_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ paßt. Es sei u die von $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ erzeugte P-Spannungsbelegung von \mathcal{Z} , und i ergebe sich durch die Gleichungen

$$F_b = Du_b \tilde{F}_b \quad M_b = Du_b \tilde{M}_b. \quad (2.63)$$

Die Fortsetzung von $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ zu $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ kann zum Beispiel mittels Algorithmus 2 aus Abschnitt 1.3 ermittelt werden. Dazu ist es nicht erforderlich Gleichungssysteme aufzulösen.

Das nächste Lemma soll verdeutlichen, in welchem Sinne h einer Inversen zu \mathfrak{H} ähnlich ist.

Lemma 12 Seien $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ ein Graph und \mathcal{K}' eine Bezugs-knotenmenge von \mathcal{G} .

(i) Für alle N-Signale (\tilde{u}, \tilde{i}) auf \mathcal{Z} , die das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllen und alle Bezugsbelegungen $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ gilt

$$\mathfrak{H} \circ h((\tilde{u}, \tilde{i}), (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}) = (\tilde{u}, \tilde{i}).$$

(ii) Sei (u, i) ein P-Signal, das das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt und $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ eine (dann existierende) Knotenbelegung, die u erzeugt. Dann gilt

$$h(\mathfrak{H}(u, i), (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}) = (u, i).$$

Beweis:

(i): Seien (\tilde{u}, \tilde{i}) ein N-Signal, das das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt und $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'} \subset \mathbf{Bew}$. Die Spannungsbelegung u vom P-Signal

$$(u, i) := h(\mathfrak{H}(u, i), (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'})$$

wird von einer Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ erzeugt, für die (ϕ_n^{-1}) zu $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ paßt. Die Bedingung, daß $(\phi_n^{-1})_{n \in \mathcal{Z}}$ zu $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ paßt, ist

$$\tilde{u}_b^{-1} = \phi_{\mathcal{A}_-(b)}^{-1} \circ \left(\phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1} \right)^{-1} \quad (b \in \mathcal{Z}) \quad (2.64)$$

und nach Inversion

$$\tilde{u}_b = \phi_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{A}_-(b)} \quad (b \in \mathcal{Z}).$$

Ersetzt man in den letzten Gleichungen die Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ durch die von ihr erzeugte P-Spannungsbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$, so erhält man

$$\tilde{u}_b = u_{b+}^{-1} \circ u_{b-} \quad (b \in \mathcal{Z}). \quad (2.65)$$

Diese Gleichungen zusammen mit den Gleichungen (2.63) für die P-Strombelegung i zeigen, daß

$$(\tilde{u}, \tilde{i}) = \mathfrak{H}(u, i)$$

gilt.

(ii): Sei (u, i) ein P-Signal auf \mathcal{Z} , dessen P-Spannungsbelegung u von einer Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathbf{Bew}$ erzeugt wird. Die Gleichungen (2.65) und (2.64) zeigen, daß $(\phi_n^{-1})_{n \in \mathcal{K}}$ dann zur Zweigbelegung $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ paßt, die sich aus der Spannungsbelegung des N-Signales

$$(\tilde{u}, \tilde{i}) := \mathfrak{P}(u, i)$$

ergibt.

Zur Ermittlung von $h((\tilde{u}, \tilde{i}), (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'})$ wird mittels Algorithmus 2 die Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ zu einer Knotenbelegung von \mathcal{G} fortgesetzt, die zu $(\tilde{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ paßt. Nach Satz 2 aus Abschnitt 1.3 existiert jedoch nur eine solche Knotenbelegung. Also muß $(\phi_n^{-1})_{n \in \mathcal{K}}$ diese Knotenbelegung sein. Durch $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ wird dann genau die P-Spannungsbelegung u erzeugt. Mit den Gleichungen (2.63) für die P-Strombelegung i ergibt sich

$$h((\tilde{u}, \tilde{i}), (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}) = (u, i).$$

□

Eine Konsequenz aus dem nächsten Satz ist, daß sich mittels der Abbildung h alle Lösungen eines P-Tragwerkes aus den Lösungen des zugehörigen N-Tragwerkes gewinnen lassen.

Jede Lösung eines P-Tragwerkes respektiert die Trägheitszweimenge. Für passend gewählte Bezugsknotenbelegungen haben die Bilder der Abbildung h diese Eigenschaft.

Sei $\mathfrak{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}, \mathcal{Z}_T)$ ein P-Tragwerk. Ist $\mathcal{Z}_T \neq \emptyset$, so ist es möglich, eine Bezugsknotenmenge \mathcal{K}' von \mathcal{G} so zu wählen, daß der Inertialknoten n_T von \mathfrak{T}_P in \mathcal{K}' enthalten ist.

Es heißt, eine Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'} \subset \mathbf{Bew}$ respektiere die Trägheitszweimenge von \mathfrak{T} , falls $\phi_{n_T} = \mathbf{Id}$ gilt. Im Falle $\mathcal{Z}_T = \emptyset$ respektiere jede Bezugsknotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'} \subset \mathbf{Bew}$ die Trägheitszweimenge.

Beschränkt man sich bei den Argumenten für die Abbildung h auf Bezugsknotenbelegungen, die die Trägheitszweimenge respektieren, so sind unter der Abbildung h die Bilder der Lösungen eines N-Tragwerkes Lösungen des bewegungsinvarianten P-Tragwerkes, zu dem dieses N-Tragwerk gehört. Das ist die zweite Konsequenz aus dem nächsten Satz. Er zeigt, in welchem Sinne physikalische und netzwerkähnliche Modellierung von Tragwerken gleichwertig sind.

Satz 7 Seien $\mathfrak{T}_P = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_P, \mathcal{Z}_T)$ ein P-Tragwerk und $\mathfrak{T}_N = (\mathcal{G}, \mathcal{V}_N, \mathcal{Z}_T)$ das \mathfrak{T}_P zugeordnete N-Tragwerk mit $\mathcal{V}_N = \mathfrak{P}(\mathcal{V}_P)$. Seien weiterhin \mathcal{K}' eine Bezugsknotenmenge von \mathcal{G} , die im Falle $\mathcal{Z}_T \neq \emptyset$ den Inertialknoten von \mathfrak{T}_P enthält, und $B \subset (\mathbf{Bew})^{\mathcal{K}'}$ die Menge aller Bezugsbelegungen von \mathcal{K}' , die die Trägheitszweimenge von \mathfrak{T}_P respektieren.

Dann gilt die Gleichung

$$\mathcal{L}_P = h(\mathcal{L}_N \times B),$$

wobei \mathcal{L}_P die Lösungsmenge von \mathfrak{T}_P und \mathcal{L}_N die von \mathfrak{T}_N bezeichnen.

Beweis:

„ $\mathcal{L}_P \supset h(\mathcal{L}_N \times B)$ “: Seien $(\tilde{u}, \tilde{i}) \in \mathcal{L}_N$, $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'} \in B$ beliebig und

$$(u, i) := h((\tilde{u}, \tilde{i}), (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}).$$

Die Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ respektiert die Trägheitszweigmengende von \mathcal{T}_P , und nach Konstruktion gilt

$$u_{b+} = \phi_{\mathcal{A}_+(b)} = \mathbf{Id} \quad \forall b \in \mathcal{Z}_T.$$

Also ist (u, i) in \mathcal{S}_{PT} , dem Teil der P-Grundsignalmenge auf \mathcal{Z} enthalten, der die Trägheitszweigmengende von \mathcal{T}_P respektiert. Mit Lemma 12 gilt

$$\mathfrak{N}(u, i) = \mathfrak{N}(h((\tilde{u}, \tilde{i}), (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'})) = (\tilde{u}, \tilde{i}) \in \mathcal{L}_N \subset \mathcal{V}_N.$$

Also ist (u, i) sogar Element von $\mathcal{S}_{PT} \cap \mathfrak{N}^{-1}(\mathcal{V}_N)$. Da \mathcal{T}_P bewegungsinvariant ist, ist diese Menge aber gerade die Verhaltensrelation \mathcal{V}_P von \mathcal{T}_P . Es gilt also $(u, i) \in \mathcal{V}_P$.

Außerdem ist klar, daß (u, i) das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für \mathcal{T}_P erfüllt, da u ja von einer Knotenbelegung erzeugt wird. Wegen $\mathfrak{N}(u, i) = (\tilde{u}, \tilde{i}) \in \mathcal{L}_N \subset \mathcal{H}_N$ ist damit (u, i) nach Folgerung 7 in \mathcal{H}_P enthalten.

Zusammenfassend ergibt sich

$$(u, i) \in \mathcal{V}_P \cap \mathcal{H}_P = \mathcal{L}_P.$$

„ $\mathcal{L}_P \subset h(\mathcal{L}_N \times B)$ “: Sei $(u, i) \in \mathcal{L}_P$ beliebig. Da (u, i) das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für \mathcal{T}_P erfüllt, existiert eine u erzeugende Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$. Wegen $(u, i) \in \mathcal{L}_P \subset \mathcal{S}_{PT}$ gilt $\phi_{n_T} = \mathbf{Id}$ im Falle $\mathcal{Z}_T \neq \emptyset$, und die Bezugsbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}$ respektiert die Trägheitszweigmengende, also gilt $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'} \in B$. Außerdem ist wegen $\mathcal{L}_N = \mathfrak{N}(\mathcal{L}_P)$ das N-Signal $\mathfrak{N}(u, i)$ in \mathcal{L}_N enthalten. Lemma 12 besagt

$$h(\mathfrak{N}(u, i), (\phi_n)_{n \in \mathcal{K}'}) = (u, i),$$

womit $(u, i) \in h(\mathcal{L}_N \times B)$ gilt. □

Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit dient vorrangig dem Vergleich der Netzwerktheorie mit der Behandlung von Stabtragwerken. Es zeichnet sich ab, daß Stabtragwerke im allgemeinen nicht günstig als Netzwerke modellierbar sind, da die Menge der möglichen momentanen Lagen eines Tragwerkelements im Anschauungsraum physikalisch durch eine nicht global koordinatisierbare Mannigfaltigkeit beschrieben wird, während für Netzwerke (auch im höherdimensionalen Fall) reelle Vektorräume die Grundlage bilden.

Mittels einer Verallgemeinerung der Netzwerktheorie wurde dennoch nach Parallelen zwischen der Modellierung von Stabtragwerken und der Netzwerktheorie gesucht.

Zunächst wurde mit der physikalischen Tragwerkmodellierung mathematisch klar formuliert, was in dieser Arbeit unter einem Stabtragwerk zu verstehen sein soll. Die physikalische Tragwerkmodellierung stützt sich auf Aussagen zu Stabtragwerken, die in der Literatur zu finden sind und von denen die meisten aus dem physikalischen Erfahrungsschatz heraus leicht einzusehen sind.

Schon bei der physikalischen Tragwerkmodellierung ist ein deutlicher Zusammenhang mit der Netzwerktheorie zu sehen. Indem man nämlich die zu einem P-Signal zugehörigen Momente auf einen gemeinsamen Punkt bezieht, kann man erreichen, daß die Gleichungen für das Kraftgrößengleichgewicht die Form der Gleichungen für das Kirchhoffsche Stromgesetz bei Netzwerken erhält.

Sei (u, i) ein P-Signal, welches das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ erfüllt. Für $b \in \mathcal{Z}$ ergibt sich aus M_b nach dem Varignon-schen Momentenprinzip das auf $0 \in \mathbb{R}^3$ bezogene Moment

$$\bar{M}_b = M_b + [u_{b+}(0), F_b].$$

Die P-Spannungsbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ wird von einer Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ erzeugt. Das Momentengleichgewicht für den Inzidenzschnitt $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ eines Knotens $n \in \mathcal{K}$ lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} M_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} (M_b + [u_{b+}(0) - u_{b-}(0), F_b]) \\ &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \bar{M}_b - [\phi_n(0), F_b] - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} (\bar{M}_b - [u_{b+}(0), F_b] + [u_{b+}(0) - \phi_n(0), F_b]) \\ &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \bar{M}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \bar{M}_b - \underbrace{\left[\phi_n, \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} F_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} F_b \right]}_{= 0 \text{ wegen Kräftegleichgew.}} \\ &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \bar{M}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \bar{M}_b. \end{aligned}$$

Das P-Signal (u, i) erfüllt also genau dann (zusätzlich zum Kirchhoffschen Spannungsgesetz) das Kirchhoffsche Stromgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} , falls die

Strombelegung $(\bar{i}_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ mit $\bar{i}_b = (F_b, \bar{M}_b) \forall b \in \mathcal{Z}$ das **Kirchhoffsche Stromgesetz** für **Netzwerke** mit Graph \mathcal{G} erfüllt.

Im Rahmen der physikalischen Modellierung lassen sich also die Kraftgrößengleichgewichte relativ einfach in der Form der Gleichungen des Kirchhoffschen Stromgesetzes für Netzwerke darstellen.

Jedoch sind die Zweigspannungen (u_{b+}, u_{b-}) eines P-Signales, das das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für P-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt, eher als Paare von Knotenpotentialen eines Netzwerkes zu deuten, statt als Zweigspannungen eines Netzwerkes. Um auch zwischen den geometrischen Größen der Tragwerkelemente eines Tragwerkes und den Zweigspannungen eines passenden Netzwerkes Parallelen ziehen zu können wurde die netzwerkähnliche Modellierung von Stabtragwerken entwickelt. Sie ist für bewegungsinvariante P-Tragwerke gleichwertig zur physikalischen Modellierung von Stabtragwerken, was die netzwerkähnlichen Modellierung physikalisch rechtfertigt.

Die Zweigspannungen eines N-Signales eines netzwerkähnlichen Tragwerkmodells entsprechen im Gegensatz zu denen eines P-Signales nicht den Lagen der Tragwerkelemente, sondern deren Formen.

Dadurch entsprechen die geometrischen Restriktionen, die sich durch die mechanisch feste Verbindung von Tragwerkelementen ergeben, dem verallgemeinerten Kirchhoffschen Spannungsgesetz.

Weiterhin ist interessant, daß die Menge der Momentanwerte aller N-Spannungssignale die sechsdimensionale Mannigfaltigkeit der orientierungserhaltenden Isometrien des \mathbb{R}^3 ist. Diese Mannigfaltigkeit hat also die gleiche Dimension wie der Vektorraum der Momentanwerte aller N-Stromsignale (Paare von Kräften und Momenten). Das entspricht der in [11] erhobenen Forderung, daß für höherdimensionale Netzwerke die Vektorräume \mathcal{U} und \mathcal{I} die gleiche Dimension haben sollen.

Jedoch können die Gleichungen, die bei Netzwerken das Kirchhoffsche Stromgesetz definieren, nurnoch in modifizierter Form auf die Kraftgrößengleichgewichte von N-Tragwerken übertragen werden.

Das läßt natürlich berechtigte Zweifel aufkommen, inwieweit der Begriff netzwerkähnliche Modellierung berechtigt ist. Vielleicht sollte man die physikalische Modellierung besser als Stromanalogie und die netzwerkähnliche Modellierung besser als Spannungsanalogie bezeichnen. Das liegt letztendlich im Ermessen des Lesers.

Zuletzt sollen noch einige Punkte angesprochen werden, die dem Autor im Rahmen des Vergleichs der Netzwerktheorie mit der Behandlung von Stabtragwerken interessant erscheinen, jedoch bisher noch nicht im Detail untersucht werden konnten.

Zum einen wird ein Weg skizziert, wie man für zwei spezielle Klassen von Stabtragwerken aus der netzwerkähnlichen Modellierung Netzwerkmodelle gewinnen kann. Zum anderen wird angedeutet, wie man durch Linearisierung der Lösungsmannigfaltigkeit eines N-Tragwerkes in einem speziellen Punkt ein Netzwerkmodell entwickeln kann.

Ebene Stabtragwerke: Bei ebenen Stabtragwerken kann die Gruppe **Lag** der orientierungserhaltenden Isometrien des \mathbb{R}^3 durch **Lag**₂, die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien des \mathbb{R}^2 ersetzt werden. Identifiziert man den \mathbb{R}^2 mit der komplexen Ebene \mathbb{C} , so kann jedes Element aus **Lag**₂ mit einem Verschiebungsvektor $\alpha \in \mathbb{C}$ und einem Winkel $\gamma \in \mathbb{R}$ in der Form $u(x) = \alpha + e^{i\gamma}x$ ($\forall x \in \mathbb{C}$) dargestellt werden.

Dafür, daß ein N-Spannungssignal $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ das Kirchhoffsche Spannungssignal für N-Tragwerke mit einem Graphen \mathcal{G} erfüllt, ist notwendig, daß dieses von den linearen Anteilen $(Du_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ erfüllt wird. (Wenn $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ zu $(u_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ paßt, so paßt $(D\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ zu $(Du_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$.)

Für ein ebenes N-Tragwerk mit Graph \mathcal{G} bedeutet das, daß die Gleichung

$$\prod_{k=1}^{l(\beta, \sigma)} e^{-\sigma(k)\gamma_{\beta(k)}} = 1$$

für jeden Umlauf (β, σ) von \mathcal{G} gelten muß, falls ein N-Spannungssignal $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ mit $u_b = \alpha_b + e^{i\gamma_b}$ das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt.

Für die Winkel $(\gamma_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ muß also die Gleichung

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \gamma_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \gamma_b = 0 \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (2.66)$$

für alle orientierte Maschen $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von \mathcal{G} gelten, was dem Kirchhoffschen Spannungsgesetz für Netzwerke nahekommt.

Die Momentengleichgewichte nehmen für Inzidenzschnitte $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ des N-Tragwerkes die Form

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} M_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} (M_b - u_b(0) \wedge F_b) = 0 \quad (2.67)$$

an. Hier soll $u_b \wedge F_b$ das Grassmannprodukt von u_b mit F_b bezeichnen.

Für $u_b = 0$ und $F_b = 0$ ($\forall b \in \mathcal{Z}$) folgt aus (2.66) schon, daß $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für ebene N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllt und (2.67) geht über in die Gleichungen für das Kirchhoffsche Stromgesetz für Netzwerke mit Graph \mathcal{G} . Hier läge also ein Ansatzpunkt zur netzwerktheoretischen Modellierung von Tragwerken, bei denen Drehbewegungen in der Ebene eine wesentliche Rolle spielen.

Fachwerke: Ein N-Tragwerk heiße *N-Fachwerk*, wenn seine Verhaltensrelation \mathcal{V}_N invariant gegenüber einer Drehung seiner Tragwerkelementeanschlüsse ist, das heißt, daß mit jedem Signal $(u, i) \in \mathcal{V}_N$ für alle Drehbewegungen $\psi_{b+}, \psi_{b-} \in C^\infty(\mathbb{R}, SO(3))$ ($b \in \mathcal{Z}$) auch die Signale (\bar{u}, \bar{i}) mit

$$\begin{aligned} \bar{u}_b &= \psi_{b+} \circ u_b \circ \psi_{b-} \\ \bar{F}_b &= \psi_{b+} F_b \\ \bar{M}_b &= \psi_{b+} M_b \end{aligned}$$

in \mathcal{V}_N enthalten sind und außerdem keine Querkräfte wirken, das heißt für alle $b \in \mathcal{Z}$ die Kraft F_b parallel zu $u_b(0)$ ist.

Wird zum Beispiel durch jeden Zweig eines N-Tragwerkes ein durch Drehgelenke abgeschlossenes Tragwerkelement beschrieben, so ist dieses N-Tragwerk ein N-Fachwerk.

Ein N-Fachwerk wird schon durch die eingeschränkte Verhaltensrelation

$$\tilde{\mathcal{V}}_N := \{(u, i) \in \mathcal{V}_N \mid \forall b \in \mathcal{Z} : Du_b = \mathbf{Id}\} \quad (2.68)$$

vollständig beschrieben und wie weiter unten motiviert wird, genügt es, die Lösungsmenge $\tilde{\mathcal{L}}_N$ des N-Tragwerkes mit der eingeschränkten Verhaltensrelation $\tilde{\mathcal{V}}_N$ zu bestimmen.

Lösungen aus $\tilde{\mathcal{L}}_N$ sind N-Signale (u, i) aus $\tilde{\mathcal{V}}_N$, die zusätzlich die Kirchhoffschen Gesetze für N-Tragwerke mit Graph \mathcal{G} erfüllen.

Wegen $Du_b = \mathbf{Id}$ ($b \in \mathcal{Z}$) für jedes $(u, i) \in \tilde{\mathcal{V}}_N$, sind die N-Spannungssignale u_b ($b \in \mathcal{Z}$) nurnoch (zeitabhängige) Verschiebungen. Damit erfüllt ein N-Signal $(u, i) \in \tilde{\mathcal{V}}_N$ genau dann das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für N-Tragwerke, wenn für jede orientierte Masche $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ die Gleichung

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} u_b(0) - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} u_b(0) = 0$$

gilt, was dem Kirchhoffschen Spannungsgesetz für Netzwerke entspricht.

Die Gleichungen für das Kirchhoffsche Stromgesetz für das N-Fachwerk vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} F_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} F_b \\ 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} M_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} M_b \end{aligned}$$

für alle Inzidenzschnitte $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$. (Man beachte, daß $[u_b(0), F_b] = 0$ gilt, da $u_b(0)$ und F_b nach Voraussetzung parallel zueinander sind.) Damit entsprechen diese Gleichungen denen für das Kirchhoffsche Stromgesetz für Netzwerke. In der Literatur wird zudem noch $M_b = 0$ ($b \in \mathcal{Z}$) gefordert und die Ermittlung der Lösungsmenge \mathcal{L}_N des N-Fachwerkes beschränkt sich auf die Lösung von Gleichungen in den Variablen $u_b(0)$ ($b \in \mathcal{Z}$) und F_b ($b \in \mathcal{Z}$). Unter dieser Voraussetzung ist das N-Fachwerk als dreidimensionales Netzwerk behandelbar.

Weiter oben wurde zunächst eine Begründung dafür ausgespart, daß es ausreicht, das eingeschränkte N-Tragwerk zu analysieren. Es ist also noch zu zeigen, daß sich aus $\tilde{\mathcal{L}}_N$ leicht \mathcal{L}_N ermitteln läßt.

Hat man eine Lösung $(u, i) \in \tilde{\mathcal{L}}_N$ des eingeschränkten N-Tragwerkes, so ist für jede beliebige Knotenbelegung $(\psi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset C^\infty(\mathbb{R}, SO(3))$ das N-Signal (\bar{u}, \bar{i}) mit

$$\begin{aligned} \bar{u}_b &:= \psi_{\mathcal{A}_+(b)} \circ u_b \circ \mathsf{T}\psi_{\mathcal{A}_-(b)}, \\ \bar{F}_b &:= \psi_{\mathcal{A}_+(b)} F_b, \\ \bar{M}_b &:= \psi_{\mathcal{A}_+(b)} M_b \end{aligned}$$

in \mathcal{L}_N enthalten, also Lösung des N-Tragwerkes. Das zeigt man sofort, indem man die zu $(\bar{u}_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ passende Knotenbelegung $(x \mapsto \psi_n(x - \phi_n(0)))_{n \in \mathcal{K}}$ nutzt, wobei $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathbf{Bew}$ eine zu $(u_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ passende Knotenbelegung sei.

Ist anderseits $(u, i) \in \mathcal{L}$ eine beliebige Lösung des N-Fachwerkes, so existiert eine zu $(u_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ passende Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}} \subset \mathbf{Bew}$ und das Signal (\bar{u}, \bar{i}) , das durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{u} &:= \mathsf{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)} \circ u_b \circ \mathsf{D}\phi_{\mathcal{A}_-(b)} \\ \bar{F}_b &:= \mathsf{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)} F_b \\ \bar{M}_b &:= \mathsf{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)} M_b \end{aligned}$$

definiert ist, liegt in $\tilde{\mathcal{L}}_N$, ist also Lösung des eingeschränkten N-Tragwerkes. (Davon kann sich der Leser leicht selber überzeugen.) Das zeigt, daß mit obiger Vorschrift alle Lösungen des Fachwerkes aus denen des eingeschränkten N-Tragwerkes rekonstruiert werden können.

Linearisierung der Lösungsmannigfaltigkeit: Oft werden Stabtragwerke so konstruiert, daß alle Tragwerkelemente im deformationsfreien Zustand in der gewünschten Weise miteinander verbunden werden können, also die geometrischen Restriktionen erfüllen. Dies entspricht einem (bekannten) Punkt (\hat{u}, \hat{i}) auf der Lösungsmannigfaltigkeit \mathcal{L}_N des zugehörigen N-Tragwerkes, für den die Kraftgrößen gleich Null sind, also $\hat{F}_b = \hat{M}_b = 0$ ($\forall b \in \mathcal{Z}$) gilt.

Solch ein Punkt wird im folgenden als *kraftgrößenfreier Konstruktionspunkt* des N-Tragwerkes bezeichnet.

Eine wichtige Aufgabe eines Ingenieurs besteht darin, nachzuweisen, daß unter einwirkenden Trägheitskräften und anderen Lasten die Festigkeit aller Tragwerkelemente gewährleistet ist und die auftretenden Verformungen innerhalb von zulässigen Grenzen bleiben. Um die im Tragwerk auftretenden Kraftgrößen und Verformungen abzuschätzen, wird dabei oft die Linearisierung der Lösungsmannigfaltigkeit in einem kraftgrößenfreien Konstruktionspunkt genutzt.

Hier soll skizziert werden, welche Konsequenzen sich aus den Kirchhoffschen Gesetzen für N-Tragwerke für den Tangentialraum an die Lösungsmannigfaltigkeit \mathcal{L}_p in einem kraftgrößenfreien Konstruktionspunkt (\hat{u}, \hat{i}) ergeben, genauer wird der Tangentialraum $\mathbf{T}_{(\hat{u}, \hat{i})} \mathcal{H}_N$ untersucht.

Größen ohne Kennzeichnung, wie zum Beispiel N-Signale (u, i) und N-Knotenbelegungen $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ stehen im folgenden genauer genommen für glatt parametrisierte Familien von solchen N-Signalen bzw. N-Knotenbelegungen, die für den Parameter Null Größen des kraftgrößenfreien Konstruktionspunktes (\hat{u}, \hat{i}) annehmen. Immer wenn von Ableitungen die Sprache ist, ist damit die Differentiation nach dem Familienparameter an der Stelle Null gemeint.

Tangentialraumgrößen im Punkt (\hat{u}, \hat{i}) werden gestrichen. Dies soll die eben erwähnte Ableitung verdeutlichen. Größen, die zum kraftgrößenfreien Konstruktionspunkt gehören, werden wie bisher durch ein Dach $\hat{}$ gekennzeichnet.

Für die N-Spannungsbelegung $(u_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ eines Signales $(u, i) \in \mathcal{H}_N$ existiert eine Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ mit

$$u_b = \phi_{\mathcal{A}_+(b)} \circ \phi_{\mathcal{A}_-(b)}^{-1} \quad \forall b \in \mathcal{Z}. \quad (2.69)$$

Zunächst werden die zugehörigen Drehungen abgeleitet, danach werden die Verschiebungen untersucht.

Für die Drehungen ergibt sich aus den Gleichungen (2.69) die Bedingung

$$Du_b = D\phi_{\mathcal{A}_+(b)} D\phi_{\mathcal{A}_-(b)}^T \quad \forall b \in \mathcal{Z}.$$

Durch Ableitung dieser Gleichung erhält man

$$Du'_b = D\phi'_{\mathcal{A}_+(b)} DT\hat{\phi}_{\mathcal{A}_-(b)} + D\hat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} DT\phi'_{\mathcal{A}_-(b)}$$

An dieser Stelle bedenke man, daß $\Omega_n := DT\phi'_n D\hat{\phi}_n$ ($n \in \mathcal{K}$) als antisymmetrische Matrix mit einem Vektor des \mathbb{R}^3 identifiziert werden kann. Die obige Gleichung wird von links mit $DT\hat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)}$ und von rechts mit $D\hat{\phi}_{\mathcal{A}_-(b)}$ multipliziert. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} DT\hat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} Du'_b D\hat{\phi}_{\mathcal{A}_-(b)} &= DT\phi'_{\mathcal{A}_-(b)} D\hat{\phi}_{\mathcal{A}_-(b)} + DT\hat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} D\phi'_{\mathcal{A}_+(b)} \\ &= \Omega_{\mathcal{A}_-(b)} - \Omega_{\mathcal{A}_+(b)}. \end{aligned}$$

Interpretiert man die Größen

$$\text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} Du'_b D\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_-(b)} = \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} (Du'_b \text{DT}\widehat{u}_b) D\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)}$$

als Zweigspannungen, so ist $(\Omega_n)_{n \in \mathcal{K}}$ für diese Zweigspannungen eine Belegung der Knoten mit Knotenpotentialen und somit gilt für sie das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für ein (dreidimensionales) Netzwerk.

Für die Verschiebungsvektoren erhält man aus (2.69) die Gleichungen

$$u_b(0) = \phi_{\mathcal{A}_+(b)}(0) + D\phi_{\mathcal{A}_+(b)} \text{DT}\phi_{\mathcal{A}_-(b)}(0 - \phi_{\mathcal{A}_-(b)}(0)).$$

für $b \in \mathcal{Z}$, und nach Linksmultiplikation mit $\text{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)}$ die Gleichungen

$$\text{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)} u_b(0) = \text{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)} \phi_{\mathcal{A}_+(b)}(0) - \text{DT}\phi_{\mathcal{A}_-(b)} \phi_{\mathcal{A}_-(b)}(0). \quad (2.70)$$

Aus dieser Gleichung kann durch Differentiation eine Gleichung in den Tangentialraumgrößen hergeleitet werden. Dabei sind alle Produkte in ähnlicher Weise zu behandeln. Deshalb wird in den folgenden Zeilen nur die linke Seite der Gleichung ausgeschrieben.

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{DT}\phi'_{\mathcal{A}_+(b)} \widehat{u}_b(0)}_{D\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)}} + \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} u'_b(0) &= \dots \\ \Omega_{\mathcal{A}_+(b)} \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} \widehat{u}_b(0) + \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} u'_b(0) &= \dots \end{aligned}$$

Die resultierende Gleichung in den Tangentialraumgrößen lautet vollständig

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{A}_+(b)} \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} \widehat{u}_b(0) + \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} u'_b(0) &= \\ \Omega_{\mathcal{A}_+(b)} \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)}(0) + \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} \phi'_{\mathcal{A}_+(b)}(0) & \\ - \Omega_{\mathcal{A}_-(b)} \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_-(b)} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_-(b)}(0) - \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_-(b)} \phi'_{\mathcal{A}_-(b)}(0) & \end{aligned}$$

An dieser Gleichung erkennt man, daß $(-\Omega_n \text{DT}\widehat{\phi}_n \widehat{\phi}_n(0) - \text{DT}\widehat{\phi}_n \phi'_n(0))_{n \in \mathcal{K}}$ eine Potentialbelegung der Knotenmenge zu der Zweigbelegung $(\Omega_{\mathcal{A}_+(b)} \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} \widehat{u}_b(0) + \text{DT}\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} u'_b(0))_{b \in \mathcal{Z}}$ ist und die Zweigbelegung erfüllt damit das Kirchhoffsche Spannungsgesetz für ein dreidimensionales Netzwerk.

Außer dem Kirchhoffschen Spannungsgesetz für N-Tragwerke soll für das Signal (u, i) auch noch das Kirchhoffsche Stromgesetz für N-Tragwerke gelten, also soll (u, i) für jeden Inzidenzschnitt $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} F_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \text{T} Du_b F_b \\ 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} M_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \text{T} Du_b (M_b - [u_b(0), F_b]) \end{aligned}$$

genügen. Mit der zu $(u_b^{-1})_{b \in \mathcal{Z}}$ passenden Knotenbelegung $(\phi_n)_{n \in \mathcal{K}}$ entspricht dies den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \text{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)} F_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \text{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)} F_b \\ 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \text{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)} M_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \text{DT}\phi_{\mathcal{A}_+(b)} (M_b - [u_b(0), F_b]). \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Leibnitz-Regel bei der Ermittlung der Tangentialraumgrößen entfallen alle Produkte, in denen die Kraftgrößen nicht abgeleitet wurden, da $\widehat{F}_b = \widehat{M}_b = 0$ ($\forall b \in \mathcal{Z}$) gilt. Übrig bleibt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} F'_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} F'_b \\ 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} M'_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} (M'_b - [\widehat{u}_b(0), F'_b]) \end{aligned}$$

Für $(\text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} F'_b)_{b \in \mathcal{Z}}$ hat zumindest schon das Kräftegleichgewicht die Form des Kirchhoffschen Stromgesetzes für Netzwerke. Mit einem ähnlichen Vorgehen wie für P-Tragwerke erhält man auch für das Momentengleichgewicht eine Form, die der des Kirchhoffschen Stromgesetzes für Netzwerke entspricht. Es werden die Vektoren

$$\bar{M}_b := \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} M'_b + \left[\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}(0), \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} F'_b \right]$$

eingeführt. Mit ihnen lautet das Momentengleichgewicht

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \bar{M}_b - \left[\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}(0), \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} F'_b \right] \\ &- \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \left(\bar{M}_b - \left[\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}(0), \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} F'_b \right] - \left[\underbrace{-\widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)}^{-1}(0) + \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_-(b)}^{-1}(0)}_{\text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} \widehat{u}_b(0)}, \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} F'_b \right] \right) \end{aligned}$$

Nach Umsortieren der Summen erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \bar{M}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \bar{M}_b - \left[\widehat{\phi}_n^{-1}(0), \underbrace{\sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} F'_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \text{DT} \widehat{\phi}_{\mathcal{A}_+(b)} F'_b}_{= 0 \text{ nach Kräftegleichgew.}} \right] \\ 0 &= \sum_{b \in \mathcal{Z}^+} \bar{M}_b - \sum_{b \in \mathcal{Z}^-} \bar{M}_b \end{aligned}$$

welche dem Kirchhoffschen Stromgesetz für Netzwerke entsprechen.

Es zeichnet sich also ab, daß die Netzwerktheorie zur Untersuchung der Tangentialräume $\mathbf{T}_{(\widehat{u}, \widehat{i})} \mathcal{V}_N$, $\mathbf{T}_{(\widehat{u}, \widehat{i})} \mathcal{H}_N$ und $\mathbf{T}_{(\widehat{u}, \widehat{i})} \mathcal{L}_N$ der entsprechenden Mannigfaltigkeiten eines N-Tragwerkes eingesetzt werden kann. Interessant wäre in diesem Zusammenhang auch, welche Rolle die zur Analyse von Tragwerken eingesetzten Weggrößen- und Kraftgrößenverfahren spielen (siehe zB. [8]).

Anhang A

Auszüge aus der Graphentheorie

Definition 8 (Lauf) Ein Paar (β, σ) einer Abbildung $\beta : \{1, \dots, l\} \rightarrow \mathcal{Z}$ ($l \in \mathbb{Z}^+$) in die Zweigmengensammlung eines Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ und einer Abbildung $\sigma : \{1, \dots, l\} \rightarrow \{+1, -1\}$ heißt *Lauf* in \mathcal{G} , wenn aufeinanderfolgenden Zahlen zugeordnete Zweige in der Form

$$\mathcal{A}_{\sigma(i+1)}(\beta(i+1)) = \mathcal{A}_{-\sigma(i)}(\beta(i)) \quad (\text{A.1})$$

($i = 1, \dots, l-1$) miteinander verbunden sind.

Die Zahl l heißt Länge des Laufes und das volle Bild von β heißt *Spur* des Laufes. Die durch

$$\eta(i) := \mathcal{A}_{\sigma(i)}(\beta(i)) \text{ für } i = 1, \dots, l \text{ und } \eta(l+1) := \mathcal{A}_{-\sigma(l)}(\beta(l)) \quad (\text{A.2})$$

definierte Abbildung $\eta : \{1, \dots, l+1\} \rightarrow \mathcal{K}$ nennt man *Knotenberührung* des Laufes und man sagt, daß der Knoten $n \in \mathcal{K}$ durch den Lauf $|\eta^{-1}(\{n\})|$ mal berührt wird (Kardinalität des Urbildes von $\{n\}$).

Man nennt $\eta(1)$ *Startknoten*, $\eta(l+1)$ *Zielknoten*. Start- und Zielknoten werden unter dem Begriff *Endknoten* zusammengefaßt und man sagt, daß der Lauf vom Startknoten zum Zielknoten *verläuft* bzw. die Endknoten miteinander *verbindet*. Die Knoten $\eta(2), \dots, \eta(l)$ heißen *innere Knoten* des Laufes (β, σ) .

Definition 9 (entgegengesetzter Lauf) Gegeben sei ein Lauf (β, σ) eines Graphen. Die Länge von (β, σ) sei l . Wie man leicht nachprüft, ist dann (β', σ') mit $\beta'(i) := \beta(l-i+1)$, $\sigma'(i) := -\sigma(l-i+1)$ ($i = 1, \dots, l$) ein Lauf, bei dem gerade Start- und Zielknoten vertauscht sind. Diesen nennt man den zu (β, σ) *entgegengesetzten Lauf*.

Definition 10 (Teillauf) Sei (β, σ) ein Lauf eines Graphen. Der Lauf (β, σ) habe die Länge l . Außerdem seien zwei Zahlen $i, j \in \mathbb{N}$ gegeben, für die $1 \leq i \leq j \leq l$ gilt. Dann heißt der Lauf (β', σ') mit Länge $l' := j - i + 1$, der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta'(k) &:= \beta(k+i-1) \\ \sigma'(k) &:= \sigma(k+i-1) \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, l'$ definiert ist, *Teillauf* von (β, σ) und wird mit $(\beta, \sigma)_{i, \dots, j}$ bezeichnet.

Definition 11 (Fortsetzung eines Laufes) Gegeben seien zwei Läufe (β, σ) und (β', σ') eines Graphen. Es heißt, (β, σ) läßt sich durch (β', σ') fortsetzen, falls der Zielknoten von (β, σ) gleich dem Startknoten von (β', σ') ist.

Für den Fall, daß sich (β, σ) durch (β', σ') fortsetzen läßt, ist die Fortsetzung von (β, σ) durch (β', σ') wie folgt erklärt. Es seien l die Länge von (β, σ) und l' die Länge von (β', σ') . Die Fortsetzung von (β, σ) durch (β', σ') ist der Lauf $(\bar{\beta}, \bar{\sigma})$ mit

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(i) &:= \beta(i) & \bar{\sigma}(i) &:= \sigma(i) & \text{für } 1 \leq i \leq l \text{ und mit} \\ \bar{\beta}(i) &:= \beta'(i-l) & \bar{\sigma}(i) &:= \sigma'(i-l) & \text{für } l+1 \leq i \leq l+l'. \end{aligned}$$

Die Fortsetzung von (β, σ) durch (β', σ') wird auch mit

$$(\beta, \sigma) \oplus (\beta', \sigma')$$

bezeichnet.

Definition 12 (Weg und orientierter Weg) Eine (nichtleere) Teilmenge \mathcal{Z}' der Zweigmengemenge eines Graphen \mathcal{G} heißt *Weg*, falls es einen Lauf (β, σ) in \mathcal{G} mit Spur \mathcal{Z}' und injektiver Knotenberührung gibt (d. h. jeder Knoten wird höchstens einmal berührt). Man sagt dann, (β, σ) *durchlaufe* den Weg \mathcal{Z}' .

Ein Paar $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von Teilmengen der Zweigmengemenge \mathcal{Z} eines Graphen \mathcal{G} bezeichnet man als *orientierten Weg*, falls $\mathcal{Z}' := \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-$ ein Weg von \mathcal{G} ist, der so von einem Lauf (β, σ) durchlaufen wird, daß für $i = 1, \dots, l$ (l : Länge von (β, σ)) die Gleichung $\sigma(i) = +1$ gilt, falls $\beta(i)$ in \mathcal{Z}^+ liegt und $\sigma(i) = -1$ gilt, falls $\beta(i)$ in \mathcal{Z}^- liegt. Man sagt (β, σ) *durchlaufe* $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ *orientierungstreu*.

Man sieht einfach ein, daß β injektiv ist:

Beweis: Angenommen es gäbe $i, j \in \{1, \dots, l\}$ mit $i \neq j$ so daß $\beta(i) = \beta(j)$ gilt. Dann ergibt sich aus (A.2) die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \{\eta(i), \eta(i+1)\} &= \{\mathcal{A}_+(\beta(i)), \mathcal{A}_-(\beta(i))\} \\ &= \{\mathcal{A}_+(\beta(j)), \mathcal{A}_-(\beta(j))\} \\ &= \{\eta(j), \eta(j+1)\}, \end{aligned}$$

was im Widerspruch zur Injektivität von η steht. □

Außerdem ist festzuhalten, daß die Mengen \mathcal{Z}^+ und \mathcal{Z}^- als Urbilder verschiedener Werte der Funktion σ natürlich zueinander disjunkt sind.

Es sei daran erinnert, daß für ein Paar $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ zueinander disjunkter Teilmengen einer beliebigen Grundmenge \mathcal{Z} (die für die Definition nicht wesentlich ist) die Klammeroperation $[(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)] : \mathcal{Z} \rightarrow \{+1, -1\}$ durch

$$[(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)](b) := \begin{cases} 0 & \text{falls } b \notin (\mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-) \\ +1 & \text{falls } b \in \mathcal{Z}^+ \\ -1 & \text{falls } b \in \mathcal{Z}^- \end{cases}$$

erklärt ist. Damit kann man kurz $\sigma(i) = [(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)](\beta(i))$ schreiben.

Lemma 13 (über orientierungstreu durchlaufene Wege) *Es gibt zu einem orientierten Weg $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ eines Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ genau einen Lauf (β, σ) , der $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ orientierungstreu durchläuft.*

Beweis: Es ist nur die Eindeutigkeit von β zu zeigen, alles andere ist trivial.

Die Menge $\mathcal{A}(\mathcal{Z}^-) \subset \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ ist eine Relation. Die Inverse zu dieser Relation $(\mathcal{A}(\mathcal{Z}^-))^{-1}$ ist durch Vertauschung der Komponenten der in der Relation enthaltenen Paare erklärt. Der Definitionsbereich der durch

$$f := \mathcal{A}(\mathcal{Z}^+) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{Z}^-))^{-1}$$

definierten Relation werde mit \mathbb{K}^+ und der Wertebereich mit \mathbb{K}^- bezeichnet¹.

Im folgenden wird gezeigt, daß $f : \mathbb{K}^+ \rightarrow \mathbb{K}^-$ eine bijektive Abbildung ist.

Sei (β, σ) ein beliebiger Lauf, der $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ orientierungstreu durchläuft und η die zugehörige Knotenberührung. Das erste Gleichheitszeichen in der Gleichungskette

$$f = \{(\mathcal{A}_{\sigma(i)}(\beta(i)), \mathcal{A}_{-\sigma(i)}(\beta(i))) \mid i = 1, \dots, w\} \quad (\text{A.3})$$

$$= \{(\eta(i), \eta(i+1)) \mid i = 1, \dots, w\} \quad (\text{A.4})$$

$$= \{(n, \eta(\eta^{-1}(n) + 1)) \mid n \in \mathbb{K}^+\} \quad (\text{A.5})$$

ergibt sich, da $\sigma(i) = -1$ für die Zweige $\beta(i) \in \mathcal{Z}^-$ einfach die Vertauschung der Komponenten in den zugehörigen Paaren $(\mathcal{A}_+(\beta(i)), \mathcal{A}_-(\beta(i)))$ in (A.3) bedeutet, das zweite Gleichheitszeichen ergibt sich mit (A.1) und (A.2) und das dritte Gleichheitszeichen steht wegen geforderten Injektivität von η . Also ist $f = \eta \circ (\eta^{-1}(\bullet) + 1)$ eine Abbildung. Diese ist als Verkettung injektiver Abbildungen injektiv, außerdem laut Definition surjektiv, also insgesamt bijektiv. Man nennt f *Knoten-Nachfolgerabbildung* des Weges $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$.

Aus (A.4), genauer $\mathbb{K}^+ = \eta(\{1, \dots, w\})$ und $\mathbb{K}^- = \eta(\{2, \dots, w+1\})$, und der Injektivität von η folgt, daß genau der Knoten $\eta(1)$ in $\mathbb{K}^+ \setminus \mathbb{K}^-$ liegt (und entsprechend genau $\eta(w+1)$ in \mathbb{K}^-). Also ist $\eta(1)$ eindeutig durch $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ festgelegt. Da f eine Abbildung ist, ergibt sich aus (A.5) die Vorschrift $\eta(i+1) = f(\eta(i))$ ($i = 1, \dots, w$) zur rekursiven Ermittlung aller Werte von η . Damit ist η vollständig durch $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ festgelegt.

Angenommen es gibt einen zweiten Lauf mit $\beta' \neq \beta$ statt β , der $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ orientierungstreu durchläuft. Dann gibt es $b \in \mathcal{Z}'$ mit $i := \beta^{-1}(b) \neq \beta'^{-1}(b) =: j$. Daraus folgt

$$\{\eta(i), \eta(i+1)\} = \{\mathcal{A}_+(\beta(i)), \mathcal{A}_-(\beta(i))\} = \{\mathcal{A}_+(\beta'(j)), \mathcal{A}_-(\beta'(j))\} = \{\eta(j), \eta(j+1)\}$$

obwohl $i \neq j$, was im Widerspruch zur Injektivität der Abbildung η steht.

Somit ist also auch β durch $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ eindeutig festgelegt. \square

Aus einem Lauf (β, σ) der Länge w , der einen orientierten Weg $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ eines Graphen orientierungstreu durchläuft, kann man den zugehörigen orientierten Weg rekonstruieren:

$$\mathcal{Z}^+ := \sigma^{-1}(\{+1\}),$$

$$\mathcal{Z}^- := \sigma^{-1}(\{-1\}).$$

Die injektive Zuordnung von orientierungstremen Läufen zu orientierten Wegen eines Graphen gestattet es jeden orientierten Weg mit dem Lauf, der diesen Weg orientierungstreu durchläuft zu identifizieren. Statt „Lauf (β, σ) , der einen orientierten

¹Also $\mathbb{K}^+ = \{n \in \mathbb{K} \mid \exists n' \in \mathbb{K} : (n, n') \in f\}$ und $\mathbb{K}^- = \{n' \in \mathbb{K} \mid \exists n \in \mathbb{K} : (n, n') \in f\}$.

Weg orientierungstreu durchläuft“, kann man also einfach „orientierter Weg (β, σ) “ sagen. So übertragen sich die Begriffe für Läufe, wie Startknoten, Zielknoten, entgegengesetzter Lauf usw., auf orientierte Wege.

Ist $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ ein orientierter Weg, so ist laut Definition $\mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-$ ein Weg. Der entgegengesetzte Lauf zu einem orientierten Weg $(\beta, \sigma) \hat{=} (\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ ist ebenfalls ein orientierter Weg, da Länge und die Menge der berührten Knoten erhalten bleiben. Durch den Vorzeichenwechsel von σ ist gerade $(\mathcal{Z}^-, \mathcal{Z}^+)$ der zu $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ entgegengesetzt orientierte Weg.

Jeder Weg wird von einem Lauf durchlaufen, der einen orientierten Weg definiert. Also gibt es zu jedem Weg einen orientierten Weg der den Weg als Spur hat. Mit dem oben gesagten gibt es dann zu einem Weg \mathcal{Z}' mindestens zwei verschiedene orientierte Wege, deren Spur gleich \mathcal{Z}' ist. Noch mehr von solchen orientierten Wege gibt es jedoch nicht:

Lemma 14 (über die Orientierung eines Weges) *Zu einem Weg \mathcal{Z}' eines Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ existieren genau zwei verschiedene orientierte Wege von \mathcal{G} mit Spur \mathcal{Z}' .*

Beweis: Angenommen, es gibt zwei orientierte Wege $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$, $(\widehat{\mathcal{Z}}^+, \widehat{\mathcal{Z}}^-)$ mit gleicher Spur \mathcal{Z}' , so daß $(\widehat{\mathcal{Z}}^+, \widehat{\mathcal{Z}}^-)$ nicht der entgegengesetzte Weg zu $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ ist.

Sei (β, σ) der orientierungstreu Lauf von $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ und η die Knotenberührung von (β, σ) . OBdA kann man annehmen, daß $\beta(1) \in \mathcal{Z}^+ \Delta \widehat{\mathcal{Z}}^-$ gilt, ansonsten ersetzt man $(\widehat{\mathcal{Z}}^+, \widehat{\mathcal{Z}}^-)$ mit dem zu ihm entgegengesetzten Weg.

Im Beweis zum Lemma 13 hatten wir festgestellt, daß die Knoten-Nachfolgerabbildung $\widehat{f} = \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{Z}}^+) \cup \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{Z}}^-)^{-1}$ von $\widehat{\mathcal{Z}}^+, \widehat{\mathcal{Z}}^-$ eine bijektive Abbildung ist.

Sei k der kleinste Index, für den $\beta(k) \in \mathcal{Z}^+ \Delta \widehat{\mathcal{Z}}^+$ gilt. Dann ist das Knotenpaar $(\eta(k-1), \eta(k)) = (\mathcal{A}_{\sigma(k-1)}(\beta(k-1)), \mathcal{A}_{-\sigma(k-1)}(\beta(k-1)))$ in \widehat{f} enthalten, und das Knotenpaar $(\mathcal{A}_{\sigma(k)}(\beta(k)), \mathcal{A}_{-\sigma(k)}(\beta(k))) = (\eta(k), \eta(k+1))$ ist mit vertauschten Komponenten in \widehat{f} enthalten. Aber $\widehat{f}(\eta(k-1)) = \widehat{f}(\eta(k+1))$ verstößt gegen die Injektivität von η . Also war die Annahme falsch. \square

Sei ein Graph \mathcal{G} gegeben. Man nennt einen Lauf (β, σ) von \mathcal{G} mit voneinander verschiedenen Endknoten *minimal*, wenn es keinen Lauf gibt,

- der die gleichen Endknoten wie (β, σ) hat,
- dessen Spur in der von (β, σ) enthalten ist und
- dessen Länge kleiner als die von (β, σ) ist.

Lemma 15 *Ein minimaler Lauf eines Graphen ist Weg dieses Graphen.*

Beweis: Angenommen, es gibt einen minimalen Lauf (β, σ) , der kein Weg ist. Dann kann die Knotenberührung η von (β, σ) nicht injektiv sein. Also gibt es einen kleinsten Index $j \in \{1, \dots, l\}$, so daß $\eta(j)$ mehr als einmal berührt wird. Sei $k \in \{j+1, \dots, l+1\}$ der ein Index, für den $\eta(k) = \eta(j)$ gilt. Dann ist der Zielknoten des Teillaufes $(\beta, \sigma)_{1, \dots, j-1}$ gleich dem Startknoten von $(\beta, \sigma)_{k, \dots, l}$, d. h. $(\beta, \sigma)_{1, \dots, j-1}$ läßt sich durch $(\beta, \sigma)_{k, \dots, l}$ fortsetzen. Der Lauf $(\beta, \sigma)_{1, \dots, j-1} \oplus (\beta, \sigma)_{k, \dots, l}$ hat die gleichen Endknoten wie (β, σ) , seine Spur ist in der von (β, σ) enthalten und seine Länge ist kleiner als die von (β, σ) . Das steht im Widerspruch zur Minimalität von (β, σ) . \square

Folgerung 8 Sind zwei voneinander verschiedene Knoten eines Graphen durch einen Lauf miteinander verbunden, so sind sie auch durch einen Weg miteinander verbunden.

In Anlehnung an [11] werden hier die orientierten Maschen eingeführt.

Definition 13 (Zyklus und Masche) Eine Teilmenge \mathcal{Z}' der Zweigmengung eines Graphen \mathcal{G} heißt *Zyklus*, wenn es einen Lauf (β, σ) mit Spur \mathcal{Z}' und injektivem β gibt, für den Startknoten und Zielknoten gleich sind. Solch einen Lauf nennt man dann *Umlauf* von \mathcal{Z}' .

Man bezeichnet \mathcal{Z}' als *Masche* von \mathcal{G} , falls \mathcal{Z}' minimal ist, d. h. \mathcal{Z}' keine echte Teilmenge besitzt, die ebenfalls Zyklus von \mathcal{G} ist.

Lemma 16 Ein Zyklus \mathcal{Z}' ist eine Masche, wenn die inneren Knoten von einem seiner Umläufe (β, σ) nur einmal berührt werden (d. h. die Einschränkung der zu (β, σ) gehörigen Knotenbelegung η auf $\{1, \dots, |\mathcal{Z}'|\}$ ist injektiv).

Beweis: Sei \mathcal{Z} die Zweigmengung von \mathcal{G} und $l := |\mathcal{Z}'|$.

Angenommen es gibt $i, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i < j \leq l + 1$ und $\{i, i + 1, \dots, j\} \subsetneq \{1, \dots, l + 1\}$, so daß $\eta(i) = \eta(j)$ gilt. Definitionsgemäß ist dann (β', σ') mit $\beta' : \{1, \dots, j - i\} \rightarrow \mathcal{Z}$, $\sigma' : \{1, \dots, j - i\} \rightarrow \{+, -\}$ definiert durch

$$\beta'(k) := \beta(k + i - 1) \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma'(k) := \sigma(k + i - 1) \quad (\text{A.7})$$

für $k = 1, \dots, j - i$ ein Umlauf für den Zyklus $\beta^{-1}(\{i, \dots, j - 1\})$, der echt in \mathcal{Z}' enthalten ist. Das steht im Widerspruch zur Minimalität des Zyklus \mathcal{Z}' . \square

Definition 14 (orientierte Masche) Ein Paar $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ von Teilmengen der Zweigmengung eines Graphen \mathcal{G} heißt *orientierte Masche* von \mathcal{G} , wenn $\mathcal{Z}' := \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-$ eine Masche ist, zu der es einen Umlauf (β, σ) gibt, so daß die Gleichungen $\beta^{-1}(\sigma^{-1}(\{+1\})) = \mathcal{Z}^+$ und $\beta^{-1}(\sigma^{-1}(\{-1\})) = \mathcal{Z}^-$ gelten. Man sagt, (β, σ) *durchläuft* $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ *orientierungstreu*.

Man beachte die Analogie zu den orientierten Wegen.

Vorausgesetzt sei ein Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ mit einer orientierten Masche $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ und es sei $l = |\mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-|$. Wenn (β, σ) ein orientierungstreu Umlauf von $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ ist, so ist mit $k \in \{0, \dots, l - 1\}$ auch (β', σ') , $\beta' : \{1, \dots, l\}$, $\sigma' : \{1, \dots, l\} \rightarrow \mathcal{Z}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \beta'(i) &= \beta(i + k) \quad , \quad \sigma'(i) = \sigma(i + k) \quad \text{für } i = 1, \dots, l - k \\ \beta'(i) &= \beta(i - l + k) \quad , \quad \sigma'(i) = \sigma(i - l + k) \quad \text{für } i = l - k + 1, \dots, l \end{aligned}$$

ein Umlauf, der $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ orientierungstreu durchläuft. Diesen Umlauf nennt man *Verschiebung* von (β, σ) um k . Also gibt es zu jedem Zweig $b \in \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-$ einen orientierungstremen Umlauf von $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ mit Startzweig b . Aber es gilt noch mehr:

Lemma 17 (orientierungstreu Umläufe orientierter Maschen) Zu jedem Zweig $b \in \mathcal{Z}' := \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-$ einer orientierten Masche $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ eines Graphen gibt es genau einen orientierungstremen Umlauf mit Startzweig b . Zwei orientierungstreu Umläufe einer orientierten Masche unterscheiden sich also nur durch eine Verschiebung.

Beweis: Im weiteren wird $l := |\mathcal{Z}'| > 1$ vorausgesetzt. (Bei Schlingen ist die Aussage trivial.)

Sei $b \in \mathcal{Z}'$ beliebig und (β, σ) ein beliebiger orientierungstreuer Umlauf von $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ mit $\beta(1) = b$.

Dann ist (β', σ') mit $\beta' : i \in \{1, \dots, l-1\} \mapsto \beta(i+1) \in \mathcal{Z}$, und $\sigma' : i \in \{1, \dots, l-1\} \mapsto \sigma(i+1) \in \{+, -\}$ der orientierungstreu Lauf des Weges $(\mathcal{Z}^+ \setminus \{b\}, \mathcal{Z}^- \setminus \{b\})$, d. h. die Abbildungen β', σ' sind durch $\mathcal{Z}^+ \setminus \{b\}$ und $\mathcal{Z}^- \setminus \{b\}$ eindeutig festgelegt. Beachtet man noch daß die Gleichung $\sigma(1) = [\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-](b)$ gilt, so ergibt sich mit

$$\begin{aligned}\beta(i) &= \beta'(i-1) \\ \sigma(i) &= \sigma'(i-1)\end{aligned}$$

für $i = 2, \dots, l$ die eindeutige Bestimmtheit von (β, σ) durch $(\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-)$ und b . \square

Definition 15 (Teilgraph) Ein Graph $G' = (\mathcal{Z}', \mathcal{K}', \mathcal{A}')$ heißt *Teilgraph* eines Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$, falls die Bedingungen $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}$, $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ und $\mathcal{A}' = \mathcal{A}|_{\mathcal{Z}'}$ erfüllt sind.

Auf der Menge $\wp(\mathcal{G})$ aller Teilgraphen eines Graphen \mathcal{G} ist die Relation \leq mit $\mathcal{G}' \leq \mathcal{G}'' := \mathcal{G}'$ ist Teilgraph von \mathcal{G}'' eine Ordnungsrelation (jedoch ist für die meisten Graphen \mathcal{G} die Menge $\wp(\mathcal{G})$ nicht vollständig geordnet).

Definition 16 (Verbundenheitsrelation) Sei \mathcal{K} die Knotenmenge eines Graphen \mathcal{G} . Es heißt $n_1, n_2 \in \mathcal{K}$ sind miteinander *verbunden*, in Zeichen $n_1 \text{ vb } n_2$, falls $n_1 = n_2$ gilt, oder es in \mathcal{G} einen Lauf gibt, der n_1 mit n_2 verbindet.

Trivialerweise ist die Relation vb reflexiv und symmetrisch. Einfach nachzuweisen ist auch, daß sie transitiv und damit Äquivalenzrelation ist. Seien $n_1, n_2, n_3 \in \mathcal{K}$ mit $n_1 \text{ vb } n_2$ und $n_2 \text{ vb } n_3$ vorgegeben. Für den Fall daß zwei der drei Knoten gleich sind, ist $n_1 \text{ vb } n_3$ klar. Andernfalls existieren ein Lauf (β, σ) , der n_1 mit n_2 verbindet und ein Lauf (β', σ') , der n_2 mit n_3 verbindet. Ohne Beschränkung kann man annehmen, daß n_2 der Zielknoten von (β, σ) und der Startknoten von (β', σ') ist (ansonsten Weg durch den zu ihm entgegengesetzten Weg ersetzen). Damit ist (β, σ) durch (β', σ') fortsetzbar und $(\beta, \sigma) \oplus (\beta', \sigma')$ verbindet n_1 mit n_3 .

Definition 17 (Zusammenhang) Ein Graph, in dem jeder Knoten mit jedem verbunden ist, heißt *zusammenhängender Graph*.

Definition 18 (Komponente eines Graphen) Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph eines Graphen \mathcal{G} heißt *Komponente* von \mathcal{G} .

Die Knotenmengen der Komponenten von \mathcal{G} sind gerade die Äquivalenzklassen der Knotenmenge von \mathcal{G} bzgl. vb .

Beweis: Sei $\mathcal{G}' = (\mathcal{Z}', \mathcal{K}', \mathcal{A}')$ eine Komponente von \mathcal{G} . Zwei Knoten, die in \mathcal{G}' miteinander verbunden sind, sind auch in \mathcal{G} miteinander verbunden. Also ist \mathcal{K}' Teilmenge einer Äquivalenzklasse $\mathcal{K}'' \in \mathcal{K}/\text{vb}$. Angenommen es gibt einen Knoten $n \in \mathcal{K}''/\mathcal{K}'$, dann kann man einen zusammenhängenden Teilgraphen \mathcal{G}'' von \mathcal{G} konstruieren, so daß \mathcal{G}' echter Teilgraph von \mathcal{G}'' ist, was im Widerspruch zur Maximalität von \mathcal{G}' steht. Man nimmt einfach zu \mathcal{Z}' die Spur eines Laufes hinzu, der n mit einem Knoten von \mathcal{K}' verbindet und zu \mathcal{K}' alle Knoten, die von diesem Lauf berührt werden.

\square

Aus der Disjunktheit der Knotenmengen verschiedener Komponenten von \mathcal{G} folgt sofort auch die Disjunktheit der Zweigmengen dieser Komponenten. Außerdem ist die Vereinigung der Zweigmengen aller Komponenten von \mathcal{G} schon die ganze Zweigmenge von \mathcal{G} .

Beweis: Das ergibt sich wieder aus der Maximalität der Komponenten. Jeder Zweig verbindet seine(n) Endknoten, damit sind die (ist der) Endknoten in der Knotenmenge einer Komponente enthalten. Ist der Zweig nicht in der Zweigmenge dieser Komponente, so ist das ein Widerspruch zur Maximalitätsforderung.) \square

Literaturverzeichnis

- [1] G. C. Andrews. Dynamics Using Vector-Network Techniques. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, University of Waterloo, Canada, April 1977.
- [2] V. I. Arnol'd. Mathematical Methods in Classical Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [3] A. Bertram. Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik. BI-Wiss.-Verl., Berlin, 1989.
- [4] K. Jänich. Vektoranalysis. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [5] G. Joos. Lehrbuch der theoretischen Physik. AULA-Verlag, Wiesbaden, 15. Aufl., 1989.
- [6] W. Klingenberg. Lineare Algebra und Geometrie. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [7] K. Königsberger. Analysis 1. Springer-Verlag, Berlin, 3. Aufl., 1995.
- [8] W. B. Krätzig. Stabtragwerke, Bd. 2. Springer-Verlag, Berlin, 2. Aufl., 1994.
- [9] W. B. Krätzig und U. Wittek. Stabtragwerke, Bd. 1. Springer-Verlag, Berlin, 3. Aufl., 1995.
- [10] G. Mehlhorn, Hg. Der Ingenieurbau. Ernst und Sohn, Berlin, 1996.
- [11] A. Reibiger. Vorlesungsskript zum Fach „Netzwerktheorie und Numerische Verfahren zur Netzwerkanalyse“, SS1994/WS94-95.
- [12] A. Sommerfeld. Mechanik. Verlag Harri Deutsch, Leipzig, 8. Aufl., 1977.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Studienarbeit zum Thema „Beiträge zur Theorie und Anwendung ein- und mehrdimensionaler Netzwerke“ selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der im Literaturverzeichnis angegebenen Literatur erarbeitet habe.

Dresden, den 28. Juni 1999

Tobias Nähring