

Beiträge zur Arbeitspunktberechnung resistiver Netzwerke

T. Nähring und A. Reibiger

TU Dresden

Camera-ready Copy for

Kleinheubacher Berichte

Manuscript-No. ???

Offset requests to:

T. Nähring,

TU-Dresden, Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik

Professur für Theoretische Elektrotechnik,

Mommsenstraße 13,

D-01062 Dresden,

Germany

Beiträge zur Arbeitspunktberechnung resistiver Netzwerke

T. Nähring und A. Reibiger

TU Dresden

Zusammenfassung. Anhand zweier Beispiele werden im ersten Teil des Textes mittels SPICE realisierbare Einbettungsverfahren zur Ermittlung aller Arbeitspunkte von einer Klasse resistiver Transistornetzwerke vorgestellt. Die für das Verfahren benötigten Eingangskennlinien können alternativ durch die z. B. in Haase (1982) beschriebene Kurvenverfolgung ermittelt werden. Im zweiten Teil wird ein Einbettungsverfahren zur Festlegung von konsistenten Startwerten und -geschwindigkeiten für dieses Verfahren vorgestellt.

Zusammenfassung. A SPICE-realizable embedding method for the computation of all DC-operating points of a class of transistor networks is proposed. The used driving point characteristics can alternatively be computed utilizing a path following algorithm described in Haase (1982). An embedding method for the determination of consistent initial values and initial velocities is given in the second part of the paper.

1 Einparametrische Einbettungsverfahren

Gegeben sei ein resistives Transistornetzwerk \mathcal{N} . Die Arbeitspunkte von \mathcal{N} sind die Lösungen eines geeigneten Systems

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{1}$$

von n Gleichungen in n Unbekannten. Die Unbekannten x_1, \dots, x_n seien dabei die Zweigspannungen und Zweigströme des Netzwerkes. Die Menge aller Arbeitspunkte ist $\mathcal{L} := \{x \in \mathbb{R}^n | F(x) = 0\}$.

Unter bestimmten Voraussetzungen an die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ mit $f(x) := (F_1(x), \dots, F_{n-1}(x))$ ist die Menge $\mathcal{L}_f := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$ eine Kurve des \mathbb{R}^n , die sich durch die Zweiggröße x_1 parametrisieren lässt, d. h., es gibt (genau) eine bijektive Funktion $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}_f$ mit $\tilde{x}_1(x_1) = x_1$ für $x_1 \in \mathbb{R}$. Von der Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) := F_n(x)$ wird gefordert, dass die zugehörige Lösungsmenge $\mathcal{L}_g := \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$ eine Hyperfläche des \mathbb{R}^n beschreibt.

Es gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f \cap \mathcal{L}_g$. Die Lösungen von \mathcal{N} sind also die Schnittpunkte der Kurve \mathcal{L}_f mit der Hyperfläche \mathcal{L}_g . Damit korrespondieren genau diejenigen Parameterwerte $x_1 \in \mathbb{R}$ zu Lösungen $\tilde{x}(x_1)$ von \mathcal{N} , für die die Gleichung $g(\tilde{x}(x_1)) = 0$ gilt und die globale n -dimensionale Nullstellensuche für (1) kann auf die „billigere“ globale eindimensionale Nullstellensuche für die Funktion $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{g}(x_1) := g(\tilde{x}(x_1))$ zurückgeführt werden (siehe Bild 2a).

Anhand des folgenden einfachen Beispiels, in dem \mathcal{N} das in Bild 1 dargestellte Flipflop ist, soll die Grundidee des weiteren Vorgehens erläutert werden. Mit $g(x) := x_2$ ist $g(x) = 0$ die Verhaltensgleichung des Leerlaufes (Strom $x_2 = 0$).

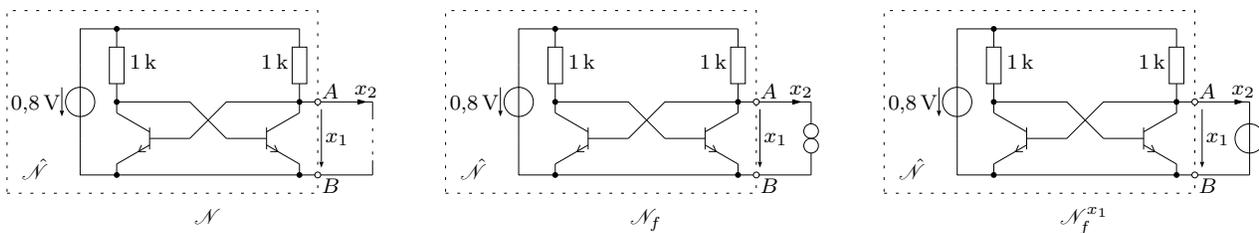


Bild 1. Die Netzwerke \mathcal{N} , \mathcal{N}_f und $\mathcal{N}_f^{x_1}$ für das Beispiel einer einparametrischen Einbettung ($\hat{\mathcal{N}}$: gestrichelt umrahmtes Teilnetzwerk)

Die Menge \mathcal{L}_f ist die Lösungsmenge des in Bild 1 dargestellten Netzwerkes \mathcal{N}_f , bei dem der Leerlauf durch einen Norator (Siehe z. B. Mathis (1987); Hasler und Neirynek (1986)) ersetzt wurde. Zur Konstruktion einer natürlichen Parametrisierung wird die Menge \mathcal{L}_f in die Teilmengen $\mathcal{L}_f^{x_1} := \{x' \in \mathbb{R}^n \mid f(x') = 0 \wedge x'_1 = x_1\}$ mit $x_1 \in \mathbb{R}$ zerlegt. Jede dieser Teilmengen $\mathcal{L}_f^{x_1}$ ist Lösungsmenge desjenigen Netzwerkes $\mathcal{N}_f^{x_1}$, bei dem der Norator durch eine unabhängige Spannungsquelle mit der eingepragten Spannung x_1 ersetzt ist (Siehe Bild 1).

Mit dem Satz von Nielsen und Willson (siehe Nielsen und Willson (1980)) kann nachgewiesen werden, dass jedes dieser Netzwerke $\mathcal{N}_f^{x_1}$ eine eindeutige Lösung hat, d. h., dass $\mathcal{L}_f^{x_1}$ für jedes $x_1 \in \mathbb{R}$ einelementig ist.

Damit lässt sich \mathcal{L}_f durch die Funktion $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die $x_1 \in \mathbb{R}$ die Lösung von $\mathcal{N}_f^{x_1}$ zuordnet, parametrisieren. Mit dem Satz über implizite Funktionen kann gezeigt werden, dass \tilde{x} eine stetig differenzierbare Kurve ist.

Das Netzwerk \mathcal{N} hat die in Willson (1975) beschriebene so genannte Nichtverstarkungseigenschaft (engl.: ‘no-gain-property’). Damit wird der Bereich, in dem zu Lösungen von \mathcal{N} korrespondierende Parameterwerte x_1 liegen können, auf das Intervall $[0, 0,8]$ beschränkt (Die obere Intervallgrenze resultiert aus der Betriebsspannung von 0,8 V).

Die Funktion \tilde{g} wurde mittels SPICE numerisch berechnet. Dazu wurde eine DC-Analyse von $\mathcal{N}_f^{x_1}$ mit x_1 als Parameter durchgeführt. Der resultierende Graph ist in Bild 2b zu sehen.

Der Graph von \tilde{g} ist die Projektion $\text{pr}_{12} \mathcal{L}_f$ der Lösungsmenge von \mathcal{N}_f auf die Komponenten der Noratorspannung x_1 und des Noratorstromes x_2 . Nach Reibiger (1986) beschreibt $\text{pr}_{12} \mathcal{L}_f$ damit das Klemmenverhalten des Teilnetzwerkes $\hat{\mathcal{N}}$ an den Klemmen A und B. Also ist $\text{graph } \tilde{g}$, wie in Reibiger et al. (2001) beschrieben, die Eingangskennlinie eines Zweipols.

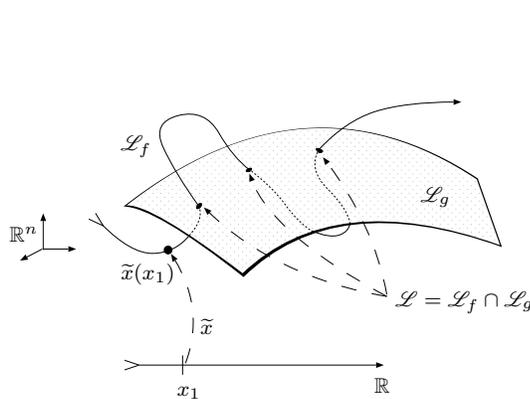


Bild 2a. Veranschaulichung der Kurve \mathcal{L}_f und der Hyperfläche \mathcal{L}_g

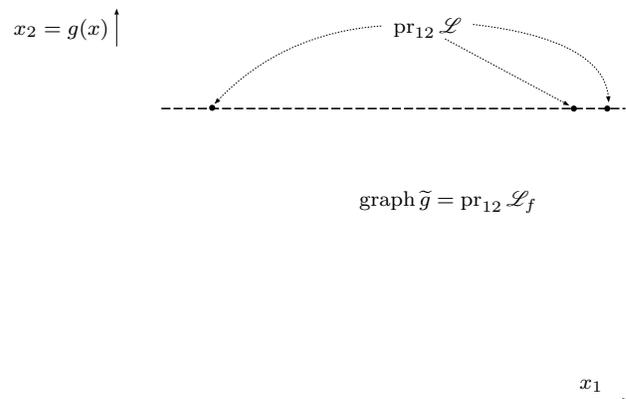


Bild 2b. Der Graph von \tilde{g} (Er ist die Projektion der numerisch berechneten Kurve \mathcal{L}_f auf die x_1 - x_2 -Ebene)

2 Zweiparametrische Einbettungsverfahren

Das folgende Beispiel soll demonstrieren, wie das soeben erlauerte Einbettungsverfahren auf eine groere Klasse von Netzwerken übertragen werden kann.

In diesem Abschnitt beschreibe das Gleichungssystem (1) die Lösungen des Netzwerkes \mathcal{N} aus Bild 3. Aus dem Satz von Nielsen und Willson folgt, dass man bei diesem Netzwerk mindestens zwei Spannungsquellen einfügen muss, um beim so ergänzten Netzwerk eine eindeutige Lösung zu erzwingen. Aus diesem Grund wird das Gleichungssystem (1) in neuer Weise aufgeteilt.

Mit $F_{n-1}(x) := g_1(x) := x_3$ und $F_n(x) := g_2(x) := x_4$ sind $g_1(x) = 0$ und $g_2(x) = 0$ die Verhaltensgleichungen der zwei in \mathcal{N} enthaltenen Leerläufe. Die zugehörigen Mengen $\mathcal{L}_{g_1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0\}$ und $\mathcal{L}_{g_2} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_2(x) = 0\}$ sind Hyperflächen des \mathbb{R}^n .

Die restlichen Gleichungen werden mit $f(x) := (F_1(x), \dots, F_{n-2}(x))$ zu $f(x) = 0$ zusammengefasst. Die Menge $\mathcal{L}_f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ beschreibt eine zweidimensionale Fläche im \mathbb{R}^n und ist die Lösungsmenge des Netzwerkes \mathcal{N}_f aus Bild 3. Die Lösungsmenge \mathcal{L} von \mathcal{N} genügt der Gleichung $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f \cap \mathcal{L}_{g_1} \cap \mathcal{L}_{g_2}$.

Zur Konstruktion einer natürlichen Parametrisierung der Fläche \mathcal{L}_f wird \mathcal{L}_f in Teilmengen $\mathcal{L}_f^{x_1, x_2} := \{x' \in \mathbb{R}^n \mid f(x') = 0 \wedge x'_1 = x_1 \wedge x'_2 = x_2\}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zerlegt. Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}_f^{x_1, x_2}$ die Lösungsmenge des Netzwerkes $\mathcal{N}_f^{x_1, x_2}$, das nach dem Satz von Nielsen und Willson eine eindeutige Lösung $\tilde{x}(x_1, x_2)$ hat. Die dadurch definierte Funktion \tilde{x} parametrisiert \mathcal{L}_f . Also kann \mathcal{L}_f durch eine DC-Analyse von $\mathcal{N}_f^{x_1, x_2}$ mit x_1 und x_2 als Parameter numerisch berechnet werden. Eine dreidimensionale Projektion der mittels SPICE berechneten Fläche \mathcal{L}_f ist in Bild

4a zu sehen. Die zu Lösungen von \mathcal{N} korrespondierenden Parameterwertepaare (x_1, x_2) ergeben sich als Nullstellen der Funktion $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{g}(x_1, x_2) := (g_1(\tilde{x}(x_1, x_2)), g_2(\tilde{x}(x_1, x_2)))$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Der Graph von \tilde{g} ist die Projektion der Lösungsmenge von \mathcal{N}_f auf die Komponenten der Noratorspannungen x_1, x_2 und -ströme x_3, x_4 . Damit beschreibt graph \tilde{g} das Klemmenverhalten des Teilnetzwerkes $\hat{\mathcal{N}}$ an den Klemmenpaaren A, B und C, D . Als zweidimensionale Fläche im \mathbb{R}^4 ist graph \tilde{g} selber nicht grafisch darstellbar, sondern nur seine dreidimensionalen Projektionen. In Bild 4a ist der für Arbeitspunkte von \mathcal{N} relevante Ausschnitt $(x_1 \in [0, 5], x_2 \in [0, 5])$ der Menge $\text{pr}_{1,3,4} \mathcal{L}_f = \{(x_1, \tilde{x}_3(x_1, x_2), \tilde{x}_4(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ zu sehen. Sie ist die Projektion von graph \tilde{g} auf die 1., 3. und 4. Komponente. Die x_1 -Koordinaten aller Nullstellen (x_1^N, x_2^N) von \tilde{g} können in zwei Schritten ermittelt werden. Zuerst wird die Höhenlinie von $\text{pr}_{1,3,4} \mathcal{L}_f$ zum Niveau $x_4 = 0$ berechnet. Die Projektion dieser Höhenlinie auf die x_1 - x_3 -Ebene ist die Menge $\text{pr}_{1,3} \mathcal{L}_{f,g_2} = \{(x_1, \tilde{x}_3(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in \mathbb{R}, \tilde{g}_2(x_1, x_2) = \tilde{x}_4(x_1, x_2) = 0\}$, die in Bild 4b dargestellt ist. Die Werte x_1^N können nun an den Schnittpunkten von $\text{pr}_{1,3} \mathcal{L}_{f,g_2}$ mit der durch die Gleichung $g_1(x) = x_3 = 0$ festgelegten Geraden abgelesen werden. Sie werden im Weiteren als Nullstellen von $\text{pr}_{1,3} \mathcal{L}_{f,g_2}$ bezeichnet.

Für jeden der so gewonnenen Werte x_1^N ist es möglich, die zugehörigen zweiten Komponenten der Nullstellen (x_1^N, x_2^N) von \tilde{g} als Nullstellen der Funktion $x_2 \mapsto \tilde{g}(x_1^N, x_2)$ zu ermitteln. In Bild 4c ist der berechnete Funktionsverlauf exemplarisch für die kleinste Nullstelle x_1^N von $\text{pr}_{1,3} \mathcal{L}_{f,g_2}$ aufgetragen. Man erkennt, dass es für diesen x_1^N -Wert nur eine gemeinsame Nullstelle der zwei Komponenten von $x_2 \mapsto \tilde{g}(x_1^N, x_2)$ gibt. Das Netzwerk \mathcal{N} hat also nur einen Arbeitspunkt x mit $x_1 = x_1^N$. Gleiches erhält man für alle weiteren Nullstellen x_1^N von $\text{pr}_{1,3} \mathcal{L}_{f,g_2}$. Damit liest man aus Bild 4b ab, dass das Netzwerk genau neun Arbeitspunkte hat.

Die Menge $\text{pr}_{1,3} \mathcal{L}_{f,g_2}$ ist die Projektion der Lösungsmenge \mathcal{L}_{f,g_2} des Netzwerkes \mathcal{N}_{f,g_2} auf die Noratorzweiggroen x_1 und x_3 und beschreibt somit das Klemmenverhalten des Netzwerkes $\hat{\mathcal{N}}$ an den Klemmen A, B bei offen gelassenen Klemmen C, D . Das heit $\text{pr}_{1,3} \mathcal{L}_{f,g_2}$ kann als Eingangscharakteristik eines Zweipols interpretiert werden.

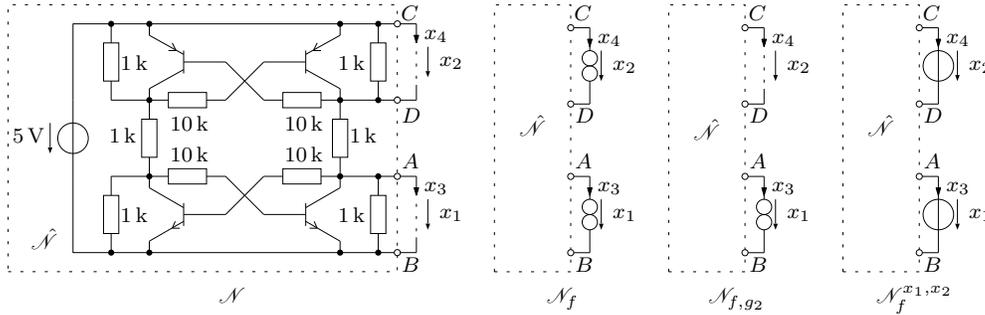


Bild 3. Die Netzwerke \mathcal{N} , \mathcal{N}_f , \mathcal{N}_{f,g_2} und $\mathcal{N}_f^{x_1, x_2}$ für das Beispiel einer zweiparametrischen Einbettung

3 Kurvenverfolgung von Eingangscharakteristiken

Wie aus Bild 4b folgt, ist die Eingangscharakteristik $\text{pr}_{1,3} \mathcal{L}_{f,g_2}$ nicht durch die Zweigspannung x_1 parametrisierbar. Es ist jedoch möglich, interessierende Teile der Kurve \mathcal{L}_{f,g_2} durch die Bogenlänge zu parametrisieren. Dies lässt sich durch ein dynamisches Netzwerk realisieren, dessen Lösungen $\tilde{x} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch die Verhaltensgleichungen

$$f(\tilde{x}(t)) = 0, \quad g_2(\tilde{x}(t)) = 0, \quad (2)$$

$$\|\dot{\tilde{x}}(t)\| = 1 \quad (3)$$

für $t \in [0, \infty)$ beschrieben werden. Die Gleichungen (2) gewährleisten, dass $\tilde{x}([0, \infty))$ in \mathcal{L}_{f,g_2} enthalten ist, und die Gleichung (3) bewirkt, dass die Lösungskurven mit einem konstanten Betrag der Geschwindigkeit \tilde{x} durchlaufen werden.

Problematisch ist bei diesem aus der Literatur bekannten Verfahren (siehe Haase (1982)) die Ermittlung eines konsistenten Anfangswertes $\tilde{x}(0)$ und einer konsistenten Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\tilde{x}}(0)$. Zur Lösung dieses Problems wurde ein als SPICE-Netzliste realisierbares Einbettungsverfahren ergänzt.

Der gewünschte Startwert wird als Schnitt der Kurve \mathcal{L}_{f,g_2} mit einer zusätzlichen Hyperfläche $\mathcal{L}_h := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$ dargestellt und es wird eine Näherung v_0 für die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\tilde{x}}(0)$ vorgegeben.

Weiterhin wird das dynamische Netzwerk modifiziert, indem die Gleichung (3) durch die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} (1 - \lambda(t)) (v(t) - v_0) + \lambda(t) (v(t) - \dot{\tilde{x}}(t)) &= 0, \\ (1 - \lambda(t)) h(\tilde{x}(t)) + \lambda(t) (\|v(t)\| - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

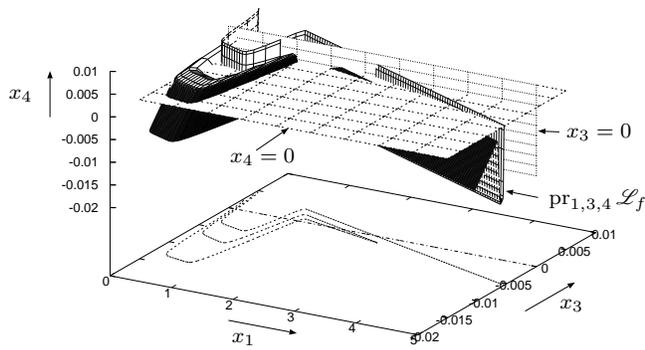


Bild 4a. Proj. des Graphen von \tilde{g} auf die 1., 3. und 4. Komponente, sowie die Proj. der Höhenlinie zum Niveau $x_4 = 0$ auf die x_1 - x_3 -Ebene

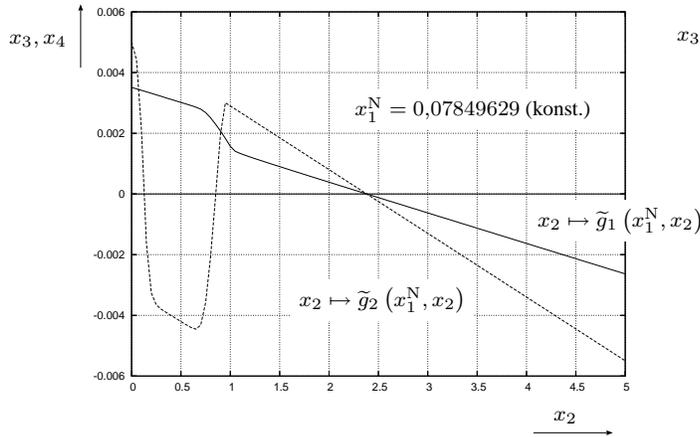


Bild 4c. Die zwei Komponenten der Funktion $x_2 \mapsto \tilde{g}(x_1^N, x_2)$, wie sie sich bei einer DC-Simulation von $\mathcal{N}_f^{x_1, x_2}$ mit x_2 als Parameter und fest vorgegebenem Wert $x_1 = x_1^N$ ergeben haben

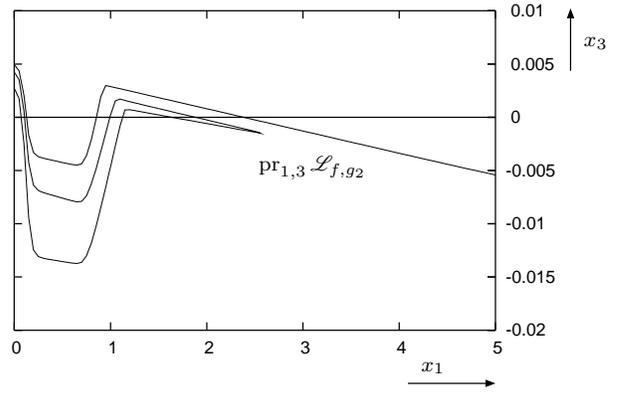


Bild 4b. Projektion von \mathcal{L}_{f,g_2} auf die x_1 - x_3 -Ebene;

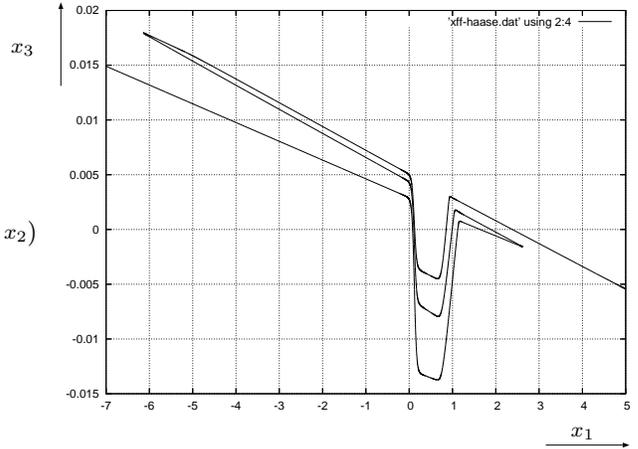


Bild 4d. Projektion des mittels Kurvenverfolgung berechneten Menge \mathcal{L}_{f,g_2} auf die x_1 - x_3 -Ebene

ersetzt wird. In (4) treten zwei zusatztliche Signale λ und v auf. Das stetige Einbettungssignal $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, steigt innerhalb eines Zeitintervalls $[0, T_0]$ von $\lambda(0) = 0$ bis auf $\lambda(T_0) = 1$ an und bleibt danach konstant gleich Eins. Der Zeitverlauf des Signals $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird durch die Gleichungen (2,4) beschrieben. Für $t = 0$ ergeben sich mit $\lambda(0) = 0$ aus (4) die Gleichungen $v(0) = v_0$ und $h(\tilde{x}(0)) = 0$, d. h., $v(0)$ wird mit der Nährung für die Anfangsgeschwindigkeit initialisiert und der Punkt $\tilde{x}(0)$ liegt im Schnitt $\mathcal{L}_{f,g_2} \cap \mathcal{L}_h$. Für $t \geq T_0$ ergeben sich mit $\lambda(t) = 1$ aus (4) die Gleichungen $v(t) = \tilde{x}(t)$ und $\|v(t)\| = 1$, die zusammen der Gleichung (3) entsprechen.

Es ist möglich, in (3) und analog in (4) den Geschwindigkeitsvektor $\tilde{x}(t)$ aller Zweiggroen des Netzwerkes durch den Vektor der Zeitableitungen geeignet gewählter Zweiggroen zu ersetzen. Zum Beispiel wurde die Kurve \mathcal{L}_{f,g_2} , von der in Bild 4d die zweidimensionale Projektion $\text{pr}_{1,3} \mathcal{L}_{f,g_2}$ zu sehen ist, mit $\text{pr}_{1,2,3} \tilde{x}(t)$ anstelle von $\tilde{x}(t)$ berechnet.

Alle in diesem Artikel vorgestellten Einbettungsverfahren haben sich bei der Arbeitspunktanalyse von zahlreichen weiteren Transistornetzwerken bewährt.

Schrifttum

Haase, J., Computation of transfer characteristics of multivalued resistive nonlinear networks, in *Proc. SSCT82, Part: Short Communications*, S. 268–272, Prague, 1982.

Hasler, M. und Neiryneck, J., *Nonlinear Circuits*, ARTECH HOUSE, INC., 685 Canton Street, Norwood, MA 02062, ISBN 089006-208-0, 1986.

Mathis, W., *Theorie nichtlinearer Netzwerke*, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-18365-5, 1987.

Nielsen, R. O. und Willson, A. N., A fundamental result concerning the topology of transistor circuits with multiple equilibria, *Proceedings of the IEEE on Circuits and Systems*, 68, 196–208, 1980.

Reibiger, A., Über das Klemmenverhalten von Netzwerken, *Wiss. Z. TU Dresden*, 37, 165–173, 1986.

Reibiger, A., Mathis, W., Nahrung, T., Kronenberg, L., und Trajkovic, L., Mathematical foundations of the tc-method for computing multiple dc-operating points, in *Proceedings of ISTET'01*, Linz/Austria, 2001.

Willson, A. N., The no-gain property for networks containing three-terminal elements, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-22, 1975.